

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

JEAN MARTINET

1^{re} THÈSE

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE LA THERMOCINÉTIQUE :
LES MÉTHODES TRANSITOIRES ET LEURS APPLICATIONS

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

ANALOGIES ÉLECTRIQUES ET TRANSFERTS DE CHALEUR EN RÉGIME TRANSITOIRE

Soutenues, le 27 mai 1960, devant la Commission d'Examen

Jury	{	MM. RIBAUD	Président.
		BRUN	Examineurs.
		MALAVARD	

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

JEAN MARTINET

1^{re} THÈSE

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE LA THERMOCINÉTIQUE :
LES MÉTHODES TRANSITOIRES ET LEURS APPLICATIONS

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

ANALOGIES ÉLECTRIQUES ET TRANSFERTS DE CHALEUR EN RÉGIME TRANSITOIRE

Soutenues, le 27 mai 1960, devant la Commission d'Examen

Jury	{	MM. RIBAUD	Président.
		BRUN	Examineurs.
		MALAVARD	



CONTRIBUTION
A L'ÉTUDE DE LA THERMOCINÉTIQUE :
LES MÉTHODES TRANSITOIRES
ET LEURS APPLICATIONS

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen J. PÉRÈS

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et algèbre supérieure.	J. P. MATHIEU.	T	Physique (Option) (Orsay).
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	COUTEAUX	T	Biol. animale (P.C.B.).
PRENANT	T	Anatom. et histol. comparées.	MAY	T	Zoologie (Orsay).
PÉRÈS	T	Mécanique des fluides et applications.	CHOQUET	T	Théorie des fonctions et topologie.
BARRABÉ	T	Géologie structurale et géologie appliquée.	FELDMANN	T	Biologie végétale (P.C.B.).
BOURCART	T	Géologie physique et géologie dynamique.	GUINIER	T	Physique des solides.
PLANTEFOL	T	Botanique.	JOST	T	Physiologie comparée.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.	FORTET	T	Calcul des probabilités et physique math.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	SCHWARTZ	T	Calcul diff. et intégral.
BOULIGAND	T	Analyse appliquée à la géométrie.	CHOUARD	T	Physiologie végétale.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	MALAVARD	T	Aviation.
WYART	T	Minéralogie.	BRELOT	T	Calcul différentiel.
TEISSIER	T	Zoologie.	NORMANT	T	Synthèse organique.
MANGENOT	T	Physique vég.	BENARD	T	Chimie minérale.
AUGER	T	Physique quantique et relativité.	BUVAT	T	Botanique (E.N.S.).
MONNIER	T	Physiologie générale.	DUGUÉ	T	Statistiques mathématiques.
PIVETEAU	T	Paléontologie.	GELOSO	T	Chimie (S.P.C.N.).
ROCARD	T	Physique (E.N.S.).	SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).	ULRICH	T	Physiologie végétale.
LAFFITTE	T	Chimie générale.	MARÉCHAL	T	Optique théorique et appl.
FAVARD	T	Géométrie supérieure.	KIRRMANN	T	Théories chimiques.
COULOMB	T	Physique du globe.	CHADEFAUD	T	Botanique.
M ^{lle} COUSIN	T	Biologie animale.	M ^{lle} LE BRETON	T	Physiologie générale.
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.	SALEM	T	Mathématiques générales.
DRACH	T	Zoologie.	LELONG	T	Mathématiques générales.
KASTLER	T	Physique (E.N.S.).	DEVILLERS	T	Anatomie et histol. comparées.
EPHRUSSI	T	Génétique.	EHRESMANN	T	Topologie algébrique.
WURMSER	T	Biologie physico-chimique.	FRANÇON	T	Physique (S.P.C.N.).
RIVIÈRE	T	Géologie (S.P.C.N.) (Orsay).	GLANGEAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.
GAUTHERET	T	Biologie végétale (P.C.B.).	GODEMENT	T	Mathématiques (M.G.P.).
LUCAS R.	T	Recherches physiques.	PISOT	T	Technique mathématique de la physique.
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire.	ROCH	T	Géologie.
ARNULF	T	Optique appliquée.	SCHATZMAN	T	Astrophysique.
MORAND	T	Physique enseignement.	TERMIER	T	Paléontologie stratigraphique.
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.).	ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
FORTIER	T	Méc. expérimentale des fluides.	LENNUIER	T	Physique (M.G.P.).
DANJON	T	Astronomie.	RIZET	T	Génétique.
PETIT	T	Biologie maritime.	ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.	M ^{me} TONNELAT	T	Relativité.
GALLIEN	T	Embryologie.	DIXMIER	T	Mathématiques (M.P.C.).
EICHHORN	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).	SOUCHAY	T	Chimie générale.
DE CUGNAC	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).	AIGRAIN	T	Electrotechnique générale.
M ^{lle} CAUCHOIS	T	Chimie physique.	BRUSSET	T	Chimie minérale.
THIELLIER	T	Physique du globe.	M. LEVY	T	Physique théorique des hautes énergies.
L'HÉRITIER	T	Génétique.	M ^{me} CHAIX	T	Chimie biologique.
GRIVET	T	Radio-électricité.	M ^{me} HUREL-PY.	T	Biologie végétale (P.C.B.).
PONCIN	T	Mécanique générale.	PIAUX	T	Chimie (S.P.C.N.).
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres.	BRUN	T	Méc. expérimen. des fluides.
QUELET	T	Chimie organique.	LEDERER	T	Chimie biologique.
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.	M ^{me} DUBREIL	T	Mathématiques.
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.	M ^{me} LELONG	T	Mathématiques (E.N.S.).
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.	BELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.).
JUNG	T	Pétrographie.	COTTE	T	Physique (Orsay).
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.	J. E. DUBOIS	T	Chimie organique.
WIEMANN	T	Chimie organique et struct.	LAMOTTE	T	Zoologie (E.N.S.).
JACQUINOT	T	Spectroscopie et phys. céleste.	André MICHEL	T	Chimie (S.P.C.N.).
VASSY	T	Physique de l'atmosphère.	OLMER	T	Énergétique générale.
DESTOUCHES	T	Théories physiques.	ROUAULT	T	Physique.
PRUVOST	T	Géologie.	GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.
AMIEL	T	Chimie générale.	BARCHEWITZ	T	Chimie-Physique.
HOCART	T	Minéralogie.	BROSSEL	T	Physique atomique.
			BUSER	T	Physiol. comparée.
			CAMUS	T	Physiol. végét. (3 ^e cycle).
			CASTAING	T	Physique générale.
			CURIEN	T	Minéralogie et cristallogr.

PANNETIER		Chimie (S.P.C.N.).	ALLARD	Chimie-Physique.
POSSOMPES	T	Zoologie.	BERTHELOT ...	Physique nucléaire et radio- activité.
PULLMANN.....		Chimie théorique.	BRICARD	Météorologie et physique de l'atmosphère.
TEILLAC		Physique nucléaire et radio- activité.	M ^{me} ALBE-FESSARD	Psychophysiologie.
TONNELAT		Biologie physico-chimique.	FRIEDEL	Physique des solides.
VILLE	T	Econométrie.	M. JULIA	Étude des molécules orga- niques complexes.
WILLEMART ...		Chimie (P.C.B.).	LENDER	Biologie animale (S.P.C.N). (Orsay).
DODE	T	Chimie (S.P.C.N.) (Orsay).	MAGAT	Physico-chimie des rayonnem.
FREYMANN	T	Physique générale.	M ^{lle} QUINTIN ..	T Electrochimie.
GUINOCHE T ...	T	Biologie vég. (Orsay).	MONOT	T Chimie du métabolisme.
ROLLET	T	Chimie (P.C.B.).	BENOIT.....	T Physiol. anim.
M ^{lle} JOSIEN ...	T	Chimie (P.C.B.).	DE POSSEL	T Analyse numérique.
CHEVALLEY ...	T	Géométrie algèbr. et théorie des groupes.	CHARLOT	T Chimie analytique.
ARNOULT	T	Électronique.	HAISSINSKY ...	T Radiochimie.
CHAPELLE	T	Physique (M.P.C.) (Orsay).	LEMÉE	T Physiol. (B.M.P.V.).
DELANGE	T	Mathématiques (Orsay).	GUERIN	T Chimie (Orsay).
DENY	T	Mathématiques (M.G.P.).		
GERMAIN	T	Mécanique théor. des fluides.		
G. LUCAS	T	Géologie.		

Secrétaire général C. MONIER

A la mémoire de mon Père

A ma Mère

A Monsieur Pierre VERNOTTE

Ingénieur Général de l'Air

dont les ouvrages fondamentaux sur la Thermocinétique
ont été à l'origine de ce travail

TABLE DES MATIÈRES

PAGES

INTRODUCTION	1
--------------------	---

PREMIÈRE PARTIE

SUR LA DÉTERMINATION DE LA DIFFUSIVITÉ THERMIQUE DES CONDUCTEURS PAR LA MÉTHODE DU SIGNAL ENTRETENU ET LES POSSIBILITÉS D'EXTENSION DE CETTE MÉTHODE POUR DES TEMPÉRATURES ÉLEVÉES (0-1 000° C)

CHAPITRE PREMIER. — Le problème de la barre semi-infinie	5
I. Généralités	5
II. Système d'unités employé	6
III. Les signaux thermiques sinusoïdaux	7
IV. Rappel des anciennes méthodes	8
V. Discussion sur les meilleures conditions de l'expérience	13
1 Détermination des dimensions optimales de la barre	13
2 Isothermicité	17
3 Détermination de la période optimale	18
VI. Essai de réalisation simple d'un signal thermique sinusoïdal	19
1 Principe	19
2 Expérience : mesure de la diffusivité du fer Armco	19
VII. Méthode de dépouillement	23
1 Principe	23
2 Résultats sur le fer Armco	24
VIII. Précision de la méthode	30
1 Précision de l'expérience	30
2 Précision du dépouillement	30
IX. Les signaux thermiques périodiques	34
1 Principe de la méthode	34
2 Expérience	34
CHAPITRE II. — Le problème de la barre finie	37
I. Généralités	37
II. Rappel des anciennes méthodes	37

	PAGES
III. Étude théorique	38
1 Cas de l'éprouvette unique	38
2 Cas de deux demi-éprouvettes juxtaposées	41
IV. Dispositifs expérimentaux	43
1 L'éprouvette	43
2 Les prises de température	43
3 Les supports	43
4 Les chauffoirs	43
V. Expérience	45
VI. Précision de la méthode	47
CHAPITRE III. — La mesure de la diffusivité thermique à différentes températures.	49
I. Principe	49
II. Correction nécessaire	49
III. Dispositifs expérimentaux	50
1 L'éprouvette et les chauffoirs	51
2 Les supports	51
3 Les prises de température	52
IV. Première série d'expérience : étude du chrome fritté	55
1 A basse température	55
2 A haute température	56
3 Résultats généraux.....	58
V. Seconde série d'expériences : étude de l'Onéral	63
<i>Conclusion</i>	64

DEUXIÈME PARTIE

SUR LA DÉTERMINATION DE LA CONDUCTIVITÉ THERMIQUE DES ISOLANTS PAR LA MÉTHODE DU TOUCHAU

CHAPITRE PREMIER. — Généralités sur les procédés de mesure de la conductivité thermique des isolants par les méthodes transitoires	67
I. Avantages et inconvénients des méthodes de régime permanent	67
II. Avantages et inconvénients des méthodes de régime transitoire	68
III. Les méthodes de refroidissement	69
IV. Les méthodes du signal	69
CHAPITRE II. La mesure du coefficient d'arrachement thermique des isolants par la méthode dite du touchau. Étude théorique	70
I. Généralités	70
II. Les touchaus	70
1 Définition.....	70
2 Principe de la méthode	71

	PAGES
III. Étude théorique	71
IV. Précision de la méthode	75
V. Détermination de la durée de l'expérience	78
VI. Le problème du contact imparfait	80
1 Première méthode de détermination de la résistance de contact.....	80
2 Seconde méthode de détermination de la résistance de contact.....	81
CHAPITRE III. — Étude expérimentale	83
I. La réalisation du touchau et de sa garde	83
1 Caractéristiques géométriques	83
2 Interactions thermiques entre le touchau et sa garde	84
3 Les déperditions parasites	85
II. Dispositifs expérimentaux	85
1 Les supports et les blocs chauffants	85
2 Les éprouvettes.....	89
3 Les mesures de température	89
4 Le circuit de compensation	90
5 Les appareils de mesure et d'enregistrement	90
III. Expériences et résultats	91
1 Conduite de l'expérience	91
2 Résultats	94
3 Contrôle des résultats	106
Conclusion	107

TROISIÈME PARTIE

LES MÉTHODES TRANSITOIRES APPLIQUÉES AUX REVÊTEMENTS PROTECTEURS

CHAPITRE PREMIER. — Problèmes nouveaux.....	111
CHAPITRE II. — Étude théorique du problème.....	113
I. Généralités	113
II. Revêtement unique.....	114
1 Revêtement épais	116
2 Plaque non protégée	118
3 Revêtement mince	118
III. Revêtements multiples	119
CHAPITRE III. — Étude expérimentale	120
I. Dispositifs expérimentaux	120
1 La source de chaleur	120
2 Les éprouvettes	121
3 Les mesures de température	122

	PAGES
II. Expériences et résultats	123
1 Conduite de l'expérience	123
2 Détermination de la constante de temps	123
3 Détermination du coefficient d'échange	128
4 Le refroidissement de la plaque non protégée	132
<i>Conclusion</i>	134
CONCLUSION GÉNÉRALE	135
BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE	137

INTRODUCTION

THÉORIE CINÉTIQUE ET TRANSFERT DE CHALEUR

Si l'on considère dans un certain milieu deux surfaces quelconques et si la température de la première de ces surfaces est supérieure à la température de la seconde, un équilibre de température tend à se réaliser. Ce phénomène qui résulte de l'observation courante constitue ce que l'on appelle un transfert de chaleur.

Si, d'autre part, on introduit, pour décrire les propriétés d'un corps quelconque, un modèle précis, ce modèle doit donner non seulement les propriétés du corps à l'équilibre, mais aussi son comportement hors de l'équilibre, c'est-à-dire lorsqu'il y a précisément transfert de chaleur. La théorie cinétique du solide doit donc, en particulier, permettre, du fait de son caractère général, la détermination des constantes thermiques du corps solide.

Due initialement à EINSTEIN et DEBYE, puis reprise par BORN et von KARMAN, cette théorie cinétique du solide a tout d'abord porté sur l'étude de la chaleur spécifique de milieux isotropiquement élastiques, cette grandeur se déduisant de l'énergie de l'ensemble des atomes d'un cristal assimilés à des oscillateurs.

Puis, DRUDE, LORENTZ, SOMMERFELD pour les métaux, PEIERLS, POMERANCHUK pour les isolants, ont, grâce aux statistiques classiques, puis quantiques, montré que l'on pouvait relier propriétés électriques et thermiques par la considération des électrons libres en équilibre avec les atomes du solide. Néanmoins, l'accord entre prévision et expérience n'a jamais été considéré comme parfait, ce qui explique la multiplicité des théories explicatives.

Construite à partir de bases différentes, souvent moins complexes, la théorie du transfert de la chaleur, due initialement à NEWTON, puis développée par FOURIER, LAPLACE, POISSON et POINCARÉ pour ne citer que les principaux, a pour unique but de relier les phénomènes de transfert dans un milieu aux constantes thermiques de ce milieu; offrant par là même la possibilité de contrôler les résultats fournis par la théorie cinétique, elle présente la particularité quelque peu paradoxale suivante à savoir qu'elle ne se préoccupe ni du caractère intime de la chaleur ni du mécanisme de son transfert, d'où la quasi-unicité des théories. En cela, cette nouvelle science présente un caractère que nous pouvons qualifier de positif puisqu'elle porte sur l'étude de paramètres moins nombreux et plus accessibles que ceux entrant en jeu dans la théorie cinétique.

On admet généralement que le transfert de la chaleur peut s'effectuer suivant plusieurs modes : conduction, convection, rayonnement, accumulation, les phénomènes thermiques naturels étant régis par l'un ou plusieurs de ces phénomènes élémentaires.

Certains auteurs [1] ont affirmé que la chaleur ne se propageait pas, le mot propagation s'appliquant uniquement au mouvement des ondes véritables. Aussi utilise-t-on communément les expressions « Transfert de chaleur », « Transmission de la chaleur » ou même « Thermocinétique », aucune de ces trois appellations n'étant toutefois universellement adoptée.

Comme toutes les sciences, la Thermocinétique a suivi les besoins et les possibilités de l'époque, ce qui explique pourquoi théorie et expériences ont jusqu'à présent porté sur des températures peu élevées. Or, la technique actuelle s'orientant au contraire de plus en plus vers les hautes températures, il importait de rechercher dans quelle mesure ces possibilités pouvaient être élargies. C'est en quelque sorte cette extrapolation qui fut notre idée première et notre but final.

Mais si nous avons pu entreprendre et mener à bien nos recherches dans ce sens, c'est principalement grâce aux ouvrages fondamentaux et aussi aux conseils de M. l'Ingénieur Général Pierre VERNOTTE. Au terme de notre étude dont ce dernier a d'ailleurs accepté d'assurer la publication, nous ne saurions dire assez combien nous lui sommes redevables. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de notre profonde reconnaissance.

Ce travail a été effectué à l'Office National d'Études et Recherches Aéronautiques. Aussi, nous ne saurions oublier ce que nous devons à M. Maurice ROY, membre de l'Institut, Directeur de l'Office, à M. Robert LEGENDRE, Directeur Technique, et à M. Marcel MATHIEU, Directeur Scientifique de la division des Matériaux, qui attirèrent notre attention sur ces nouveaux problèmes, nous prodiguèrent leurs encouragements, et dont la constante bienveillance à notre égard ne s'est jamais démentie.

Qu'il nous soit aussi permis d'exprimer notre respectueuse gratitude à M. le Professeur RIBAUD, membre de l'Institut, qui a accepté de suivre ce travail et dont les avis éclairés nous ont été souvent précieux, à MM. les Professeurs BRUN et MALAVARD qui nous ont aussi maintes fois aidés de leurs conseils et ont bien voulu s'intéresser à nos résultats.

Nous tenons enfin à remercier les services de la Direction Technique et Industrielle du Ministère de l'Air qui ont donné à ce travail la forme parfaite qui est de règle dans leurs publications.

PREMIÈRE PARTIE

SUR LA DÉTERMINATION DE LA DIFFUSIVITÉ THERMIQUE DES
CONDUCTEURS PAR LA MÉTHODE DU SIGNAL ENTRETENU
ET LES POSSIBILITÉS D'EXTENSION DE CETTE MÉTHODE
POUR DES TEMPÉRATURES ÉLEVÉES

LE PROBLÈME DE LA BARRE SEMI-INFINIE

I. — GÉNÉRALITÉS

Problème fondamental de la Thermocinétique, il se pose de la façon suivante : Étant donné une barre cylindrique semi-infinie chauffée à l'une de ses extrémités, la chaleur chemine dans cette barre et se dissipe dans l'enceinte environnante. Quelle va être, à un instant donné, la répartition des températures le long de cette barre?

Nous choisirons pour cette étude le sens de la longueur comme celui des abscisses, l'origine étant l'abscisse d'une section droite quelconque que nous prendrons voisine de la source de chaleur et nous désignerons par

- D le diamètre de la barre,
- s la surface de sa section droite,
- p son périmètre,
- T la température au point d'abscisse x ,
- $\bar{T}$ la température au point d'abscisse x en régime stationnaire,
- θ la température de l'enceinte,
- $\bar{\theta}$ la température de l'enceinte en régime stationnaire,
- t le temps,
- λ la conductivité thermique supposée constante de la barre,
- c la chaleur spécifique par unité de masse supposée aussi constante,
- ρ la densité également supposée constante,
- $\frac{\lambda}{c\rho}$ la diffusivité également supposée constante,
- P la quantité de chaleur par unités de volume et de temps qui permet de chauffer la barre dans une de ses sections droites.

Nous ferons, en outre, l'hypothèse incorrecte mais en pratique suffisante, de l'uniformité de température dans chacune de ces sections droites.

En coordonnées cartésiennes, l'équation de la barre dans un milieu à une dimension, limité ou non est :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -P.$$

Il nous faut maintenant préciser les conditions aux limites, c'est-à-dire sur la périphérie de la barre et à son extrémité non chauffée, laquelle, dans le cas actuel, est rejetée infiniment loin.

Il nous faut, pour cela, faire intervenir le coefficient de passage de la chaleur de la barre dans l'enceinte. Ce coefficient, que nous désignerons par h , est un coefficient global, c'est-à-dire qu'il tient à la fois compte du rayonnement, de la conduction de l'air ambiant et de la convection *naturelle* dans l'atmosphère de l'enceinte. Il se définit en écrivant que la densité de flux thermique est égale au produit de ce coefficient par la différence de température existant entre un point de la surface de la barre (c'est-à-dire de la section droite correspondante) et un point quelconque du fluide loin dans le milieu ambiant. Tout comme un facteur d'émission, ce coefficient dépend de l'état de surface de la barre et, tout comme un coefficient de convection, du fluide environnant.

Pour de faibles écarts de température on admet qu'il est indépendant de la température, donc qu'il est constant tout le long de la barre [2].

Pour un tronçon de longueur dx , nous pouvons considérer comme quantité de chaleur injectée la déperdition latérale changée de signe, soit :

$$- hp (T - \theta) dx.$$

La puissance correspondante injectée par unité de volume est donc :

$$- hp (T - \theta) dx \cdot \frac{1}{s dx} = - \frac{hp}{s} (T - \theta).$$

Par suite l'équation thermocinétique aura pour expression :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{c \rho}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{hp}{\lambda s} (T - \theta).$$

Et si l'on prend comme origine des températures la température θ de l'enceinte supposée constante ($\theta = \bar{\theta}$) :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{c \rho}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{hp}{\lambda s} T. \quad (1)$$

C'est une équation aux dérivées partielles. Sa résolution donnera précisément la valeur de la température T au point d'abscisse x et, inversement, la connaissance du champ de température le long de la barre devra permettre de connaître les coefficients $\frac{c \rho}{\lambda}$ et $\frac{hp}{\lambda s}$ de cette équation.

II. — SYSTÈME D'UNITÉS EMPLOYÉ

Le système C.G.S.-calorie étant encore le plus employé, nous l'avons utilisé de préférence au système C.G.S.-joule.

On passe d'ailleurs aisément du premier système au second en multipliant par 4,18 les valeurs numériques initiales de la conductivité thermique et de la chaleur spécifique.

La conductivité thermique λ s'exprime donc en calories/cm/s/°C.

La chaleur spécifique c par unité de masse en calories /g /°C.

Le coefficient h d'échange superficiel en calories /cm² /s /°C.

La diffusivité thermique $\frac{\lambda}{c \rho}$ en cm² /s.

III. — LES SIGNAUX THERMIQUES SINUSOIDAUX

Le procédé général de résolution de l'équation dans le cas général est basé sur la remarque suivante à savoir que les expressions du type :

$$T_n = A_n e^{-m_n x} \sin \left(2 \pi n \frac{t}{\tau} - \mu_n x - \varphi_n \right) \quad (2)$$

sont des solutions simples [3 et 4]. La solution générale aura donc pour expression :

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-m_n x} \sin \left(2 \pi n \frac{t}{\tau} - \mu_n x - \varphi_n \right) + A_0 e^{-m_0 x}. \quad (3)$$

Nous sommes donc amenés de ce fait à envisager des températures qui varient périodiquement dans le temps, τ étant précisément la période du phénomène thermique.

Une telle solution (2) satisfait à la condition aux limites :

$$T = 0 \quad \text{pour} \quad x \text{ infini.}$$

Un calcul élémentaire d'identification conduit à :

$$m_0^2 = m_1^2 - \mu_1^2 = m_2^2 - \mu_2^2 = \dots m_n^2 - \mu_n^2 = \frac{hp}{\lambda s},$$

$$\mu_0 = 0, \quad m_1 \mu_1 = \frac{\pi c \rho}{\lambda \tau}, \quad m_2 \mu_2 = 2 \frac{\pi c \rho}{\lambda \tau}, \quad m_n \mu_n = n \frac{\pi c \rho}{\lambda \tau}. \quad (4)$$

Les coefficients A_n sont précisément les coefficients de la série de FOURIER représentant le signal de période τ relatif à l'origine des abscisses.

Nous appellerons ce signal signal émis (SE).

Ainsi donc, si les caractéristiques du signal émis sont connues et s'il en est de même pour $\frac{c \rho}{\lambda}$ et $\frac{hp}{\lambda s}$, l'équation (1) est résolue et l'on connaît en chaque section droite d'abscisse x la température correspondante que nous appellerons signal reçu (SR).

Inversement, si l'on connaît les caractéristiques des signaux émis et reçu, on peut en déduire $\frac{\lambda}{c \rho}$ et $\frac{hp}{\lambda s}$; en effet, la décomposition en série de FOURIER des deux signaux nous conduit à :

$$T(0, t) = a_0 + a_1 \sin \left(2 \pi \frac{t}{\tau} - \varphi_1 \right) + a_2 \sin \left(4 \pi \frac{t}{\tau} - \varphi_2 \right) + \dots$$

$$T(x, t) = b_0 + b_1 \sin \left(2 \pi \frac{t}{\tau} - \varphi_1 - \nu_1 \right) + b_2 \sin \left(4 \pi \frac{t}{\tau} - \varphi_2 - \nu_2 \right) + \dots$$

La dernière égalité conduit, par identification avec (3) à :

$$e^{-m_0 x} = \frac{b_0}{a_0}, \quad e^{-m_1 x} = \frac{b_1}{a_1}, \quad \text{etc...}$$

c'est-à-dire à :

$$m_0 = \frac{1}{x} \text{Log} \frac{a_0}{b_0}, \quad m_1 = \frac{1}{x} \text{Log} \frac{a_1}{b_1}, \quad \text{etc...}$$

et à :

$$\mu_1 = \frac{\nu_1}{x}, \quad \mu_2 = \frac{\nu_2}{x}, \quad \text{etc...}$$

d'où :

$$\frac{hp}{\lambda s} = \frac{1}{x^2} \left(\text{Log} \frac{a_0}{b_0} \right)^2 = \frac{1}{x^2} \left(\text{Log} \frac{a_1}{b_1} \right)^2 - \frac{\nu_1^2}{x^2} = \dots$$

et :

$$\frac{\pi c \rho}{\lambda \tau} = \frac{\nu_1}{x^2} \text{Log} \frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{2} \frac{\nu_2}{x^2} \text{Log} \frac{a_2}{b_2} = \dots$$

L'ambiguïté de la détermination de la phase, ambiguïté due à l'inversion des sinus, étant levée grâce aux relations (4).

Il est à remarquer que si le signal émis est rigoureusement sinusoïdal, c'est-à-dire si $a_2 = a_3 = \dots a_n = 0$, il doit en être de même pour $b_2, b_3 \dots b_n$, de sorte que le signal reçu est également rigoureusement sinusoïdal.

IV. — RAPPEL DES ANCIENNES MÉTHODES

Nombreux sont les auteurs qui sont partis de considérations analogues en vue de déterminer la diffusivité thermique $\frac{\lambda}{c \rho}$ des corps conducteurs. Leurs méthodes, communément appelées méthodes du signal, présentent en effet sur les méthodes de régime permanent les avantages suivants :

— simplicité de l'appareillage, entre autres, suppression du dispositif calorimétrique de mesure de flux;

— rapidité de la mesure. Alors que le temps nécessité était couramment d'un ou deux jours, il suffit désormais de quelques minutes (rarement quelques heures);

— inutilité du four à gradient destiné à éliminer les déperditions latérales; en effet la méthode du signal permet précisément de déterminer le coefficient de déperdition;

— plus grande précision dans la mesure des températures; on s'affranchit en effet de l'imprécision due au fait qu'on n'est jamais certain de se trouver en régime permanent;

— suppression des résistances de contact entre éprouvette et dispositif calorimétrique;

— faible intervalle de température nécessaire à la mesure et dans lequel on doit supposer constantes les grandeurs que l'on veut mesurer.

En revanche, les inconvénients sont les suivants :

— dans le cas de la barre semi-infinie, difficulté de réalisation de la condition limite $T = 0$ pour x infini, ce qui nécessite une longueur d'éprouvette relativement grande;

— difficulté technique de réaliser un signal sinusoïdal;

— difficulté de réaliser ce signal à des températures élevées (600° C constituait jusqu'à présent un plafond);

— imprécision de la période;

— longueur du dépouillement due à l'analyse harmonique;

— on détermine la diffusivité et non pas la conductivité thermique.

Parmi les principaux travaux effectués sur la méthode du signal, nous indiquerons pour mémoire ceux de :

— J. D. FORBES [5 et 6] qui opérait, il est vrai, en régime permanent sur deux longues barres de gros diamètre (70 à 80 mm). La première était chauffée à une de ses extrémités; le régime permanent étant atteint, une série de thermomètres permettait de connaître le champ et le gradient de température. Une seconde expérience effectuée sur la seconde barre préalablement chauffée uniformément et qu'il laissait refroidir librement permettait d'évaluer le coefficient de déperdition latérale. Nous verrons comment cette méthode a été récemment reprise et perfectionnée.

— I. INGENHAUSEN [7] qui avait rendu la méthode précédente autothermométrie au moyen de couches de cire; en repérant sur les barres étudiées les distances x où il y avait arrêt de la fusion et pour des mêmes dissipations latérales, on avait $\frac{x}{\sqrt{\lambda}} = C_{\text{tes}}$, d'où la possibilité d'effectuer des mesures relatives. Cette méthode a été récemment perfectionnée par M. VERNOTTE [8].

— A. J. ANGSTRÖM [9 et 10] qui, le premier, chercha à réaliser des températures variant périodiquement : une longue barre de petite section était, à intervalles réguliers, chauffée à son extrémité par un courant de gaz chaud, puis refroidie par un courant d'eau froide. On obtenait ainsi une loi de température crénelée. Cette loi comportait un fondamental et l'on observait ce qu'il devenait à une certaine distance. Les calculs pouvaient s'effectuer aussi bien sur les fondamentaux que sur les harmoniques. Une vérification était ainsi possible.

— Récemment C. L. HOGAN et R. B. SAWYER [11] ont repris et amélioré la méthode de FORBES et cela de la façon suivante :

Ces deux auteurs travaillaient sur des éprouvettes de 3 mm de diamètre et 300 mm de longueur. Deux fils de cuivre brasés aux extrémités permettaient à un courant électrique de les chauffer uniformément à une température quelque peu supérieure à celle d'un tube de cuivre l'entourant, lequel était placé dans un four, le tout étant

rempli de Silocel (*fig. 1*); on déterminait ainsi le coefficient de déperdition h . Cette première expérience terminée, un chauffage auxiliaire permettait d'élever quelque peu la température de l'une des extrémités des mêmes éprouvettes et, de la répartition longitudinale des températures, on en déduisait la conductivité thermique;

Cette méthode, qui avait l'avantage de permettre la détermination simultanée des conductivités thermique et électrique (les couples pouvant également

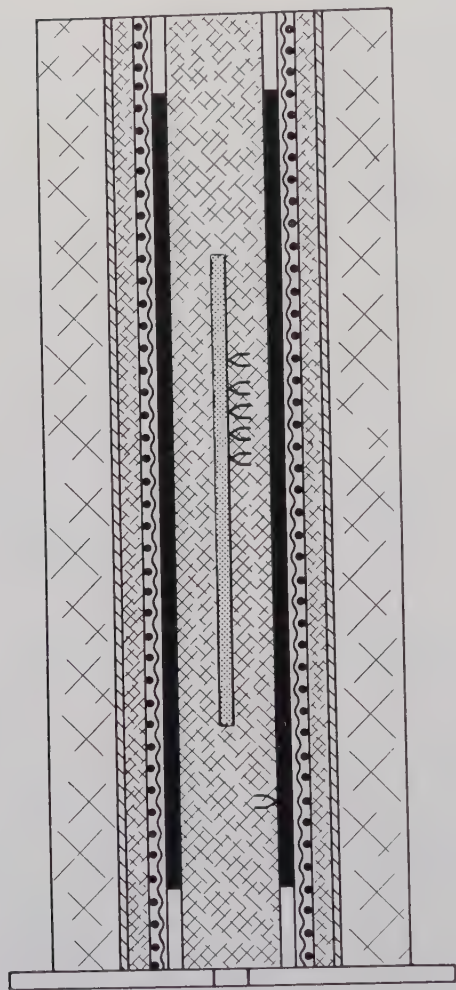


Fig. 1. — Appareil de mesure de C. L. HOGAN et R. B. SAWYER

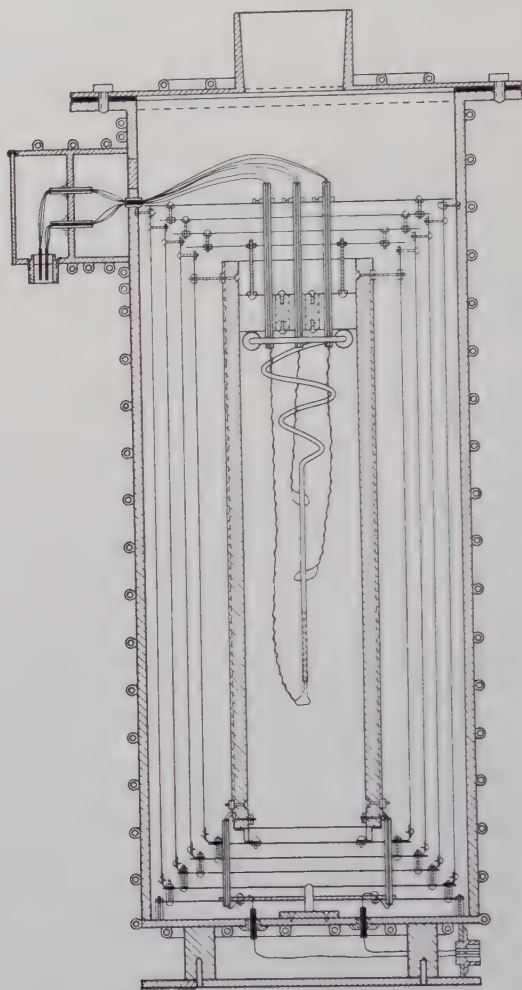


Fig. 2. — Appareil de mesure de P. H. SIDLES et G. C. DANIELSON

servir à déterminer la chute de potentiel dans la première expérience), a été appliquée jusqu'à 900° C à des métaux ainsi qu'à des réfractaires du type Inconel.

— La méthode du signal proprement dite a été reprise par W. KING [12] lequel, opérant au voisinage de la température ambiante sur la même éprouvette, effectuait deux expériences avec deux périodes différentes. Il déterminait la vitesse de propagation et par là, la diffusivité, les deux expériences permettant d'éliminer le coefficient h .

— Après lui, C. STARR [13], opérant dans les mêmes conditions, effectuait lui aussi, toujours au voisinage de la température ambiante, deux expériences sur une éprouvette de 2 à 3 mm de diamètre et de 250 à 500 mm de longueur. L'expérience permettait de déterminer les amplitudes des signaux émis et reçu et, par là, d'en déduire la diffusivité tout en éliminant h .

— Plus récemment P. H. SIDLES et G. C. DANIELSON [14] ont repris la méthode d'ANGSTRÖM en utilisant des éprouvettes de 9 mm de diamètre et de 500 mm de longueur bobinées à une extrémité et placées dans un four à vide (*fig. 2*). Un rhéostat à came permettait l'obtention d'une puissance de chauffe donc d'un signal sinusoïdal, d'amplitude 1° C. Le vide avait précisément pour but de limiter les déperditions de puissance calorifique dans l'enceinte. Le refroidissement s'opérant naturellement, la période était d'environ 100 s. L'enregistrement se faisait grâce à un ensemble amplificateur enregistreur électronique permettant de séparer les composantes continue et alternative des signaux et, de la détermination graphique des maximums et des vitesses de propagation, on déduisait la diffusivité.

Cette méthode a été appliquée avec succès et jusqu'à 500° C environ sur des éprouvettes métalliques. La précision a été estimée à 5 %.

— G. E. McINTOSH, DE HAMILTON et W. L. SIBBITT [15] ont également utilisé la méthode du signal sinusoïdal avec déperdition contrôlée. L'éprouvette avait de 2,5 à 6 mm de diamètre, de 150 à 600 mm de longueur et était placée dans une enceinte à vide. L'onde sinusoïdale était créée par le chauffage local intermittent d'un fluide (en l'occurrence de l'huile) dont la circulation était assurée par une pompe. Le fluide agissait sur la température de l'extrémité de la barre puis retournait dans un calorimètre où il retrouvait une température constante. L'amplitude du signal était d'environ 1° C. Un potentiomètre amplificateur et enregistreur complétait l'ensemble. Les auteurs utilisaient, pour le dépouillement, l'analyse harmonique.

Des mesures effectuées à basses températures sur des éprouvettes métalliques ont amené les auteurs à rejeter leur propre méthode du fait de sa trop grande imprécision (6,8 %).

— Les derniers à avoir appliqué cette méthode semblent avoir été M. A. EL HIFNI et B. T. CHAO [16]. Ces auteurs opéraient sur une éprouvette de 150 mm de longueur montée concentriquement avec un tube de même matériau. L'une des extrémités était plongée dans un bain métallique fondu maintenu à température constante, l'autre limitée par un isolant (*fig. 3*). Grâce à un variateur à came, on pouvait agir sur une source de chaleur située sous le bain, tandis qu'un circuit d'air comprimé permettait, dans l'espace annulaire, d'agir sur le refroidissement. L'amplitude des signaux pouvait atteindre 7° C; trois ou quatre ondes sinusoïdales étaient nécessaires pour l'établissement du régime. La période était d'environ 500 s. Le dépouillement des expériences était fait en supposant les déperditions latérales négligeables. La température maximale des expériences était d'environ 600° C, la précision estimée à 2 ou 3 %.

— La méthode du signal a été le plus souvent appliquée à des corps conducteurs ou peu conducteurs. Toutefois, elle est plus générale. J. BILLINGTON [17] l'a appliquée à des barres isolantes de section carrée de 100 mm de côté et de 300 mm de longueur, la période totale du phénomène étant cette fois fort longue (100 mn).

— Enfin, pour conclure l'historique de la méthode, nous citerons pour mémoire une variante : la méthode de l'impulsion préconisée par S. PROCOPIU et I. BURSUC [18]. Une barre métallique conductrice est chauffée à une extrémité grâce à l'application, pen-

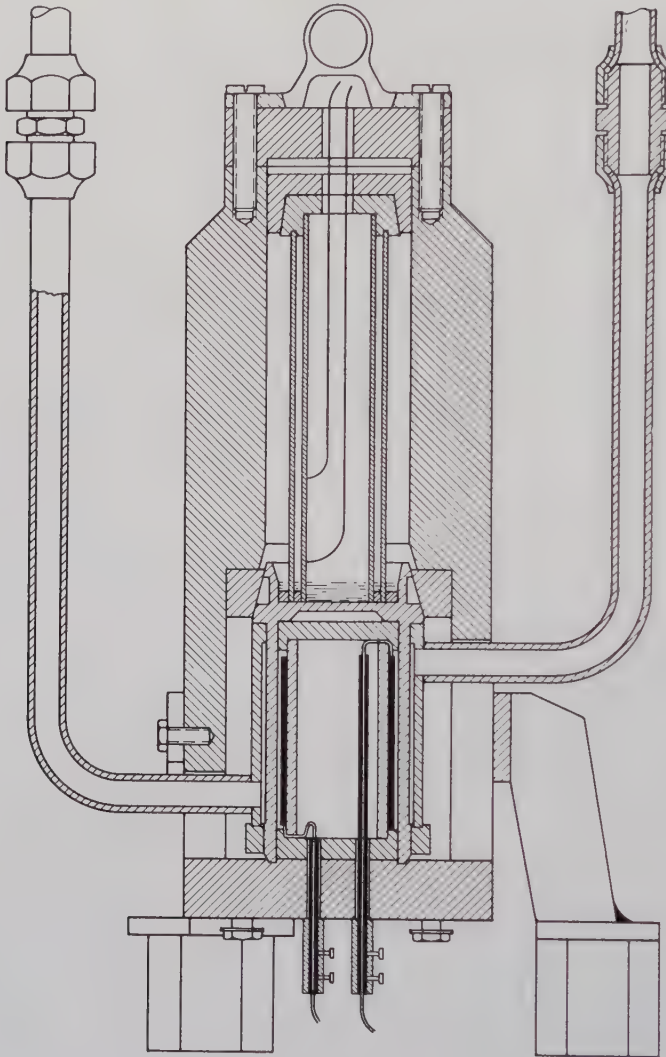


Fig. 3. — Appareil de mesure de M. A. EL HIFNI et B. T. CHAO

dant 1 ou 2 s, d'un disque épais chauffé, lequel introduit dans la barre une quantité de chaleur Q .

A la distance x , on suit l'évolution de la température en fonction du temps. En supposant la déperdition latérale négligeable, cette température est donnée par :

$$T = \frac{Q}{2\sqrt{\frac{\pi\lambda}{c\rho}t}} e^{-\frac{x^2}{4\lambda/c\rho t}}.$$

Elle passe par un maximum au temps t_m tel que $\frac{x^2}{2\lambda/c_p} = t_m$ d'où la diffusivité.

Il est certain, nous le verrons d'ailleurs, que la méthode du signal appliquée à la barre semi-infinie n'est pas, comme d'ailleurs les méthodes de régime permanent, d'une très grande précision. Pour relier la conductibilité thermique à d'autres grandeurs (mécaniques, par exemple), la précision de 1 % serait souhaitable, mais presque impossible à atteindre, surtout pour des températures élevées. Seule, la méthode des sources en mouvement, méthode préconisée par D. ROSENTHAL [19, 20 et 21], semble pouvoir atteindre une telle précision; encore est-elle limitée à des longs tubes (plus d'un mètre) et à des corps de haute diffusivité thermique comme l'aluminium.

V. — DISCUSSION SUR LES MEILLEURES CONDITIONS DE L'EXPÉRIENCE

Jusqu'à présent, les différents auteurs dont nous venons de parler ont eu, certes, pour but la recherche de la précision, mais il ne semble pas qu'ils se soient beaucoup préoccupés des dimensions (longueur et diamètre) de l'éprouvette. Ainsi que nous allons le voir, c'est là un problème important, principalement conditionné par la température au voisinage de laquelle on travaille.

1. — Détermination des dimensions optimales de la barre.

Si le diamètre ne semble pas, au premier abord, une dimension intéressante, la longueur l'est certainement davantage, car c'est elle qui conditionne l'amortissement. Il y a donc certainement une relation entre la diffusivité et le minimum de longueur admissible pour l'éprouvette [22].

Supposons que l'amortissement caractérisé à la distance L par l'exponentielle $e^{-\sqrt{\frac{h\rho}{\lambda s}}L} = e^{-m_0L}$ vaille $1/250$, ce qui, sur les barres souvent courtes dont on dispose n'est pas toujours possible, on a

$$m_0L = 5,5, \quad (5)$$

$$\text{c'est-à-dire :} \quad L^2 = 7,5 \frac{\lambda D}{h}. \quad (6)$$

Pour que l'amortissement se mesure avec précision entre deux points distants de l_{cm} , il est souhaitable que $m_0l = 1$. Avec $l = 5$ cm on aurait $m_0 = \frac{1}{5}$ ce qui, comparé à la relation (5), conduit à une première valeur de la longueur minimale de la barre : 28 cm, longueur qui ne dépend ni de λ , ni de h , ni de D . Le diamètre sera fixé par la relation (6) qui suppose toutefois la connaissance de h .

Ce dernier coefficient h est la somme de trois coefficients :

le premier (coefficient h_1 d'échange par convection) qui, dans le système C.G.S. cal, est sensiblement donné par :

$$h_1 = \frac{0,0003}{\sqrt{D}} \quad [23];$$

— le second (coefficient h_2 d'échange par rayonnement) qui est donné par la loi de STEFAN et qui, au voisinage de la température ambiante T_{0K} est donnée par la relation approchée suivante :

$$h_2 = \varepsilon \sigma \frac{T_K^4 - T_{0K}^4}{T_K - T_{0K}} \neq 4 \varepsilon \sigma T_{0K}^3,$$

σ étant la constante de STEFAN et ε le facteur total d'émission de la substance.

Pour un corps noir $h_2 \neq 0,00014$ au voisinage de 20°C ; si $D = 1 \text{ cm}$:

$$h_1 + h_2 = 0,00044;$$

— le troisième (coefficient h_3 de déperdition par conduction dans l'air ambiant), qui est approximativement donné par la formule :

$$h_3 = \frac{2\lambda'}{D \text{ Log}_e \frac{\Phi}{D}},$$

λ' étant la conductivité thermique de l'air ($5,8 \cdot 10^{-5}$ à 20°C) et Φ le diamètre de l'enceinte.

Si l'enceinte est suffisamment vaste, h_3 est négligeable devant h_1 et h_2 .

La relation $m_0 = \frac{1}{5}$ conduit à $\frac{\lambda D}{h} = 100$, d'où :

$$D = \frac{100}{\lambda} \left[\frac{0,0003}{\sqrt{D}} + 0,00014 \varepsilon \right]$$

et

$$\lambda = \frac{0,03}{D \sqrt{D}} + \frac{0,014 \varepsilon}{D}.$$

Étant donné une éprouvette de diamètre donné, l'augmentation du facteur d'émission a pour effet d'augmenter la valeur de la conductivité thermique qui correspond le mieux à ce diamètre. La dernière égalité conduit dans les cas $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = 1$ au tableau suivant (tabl. I) des valeurs minimales de λ pour un diamètre donné D .

Ainsi, pour un diamètre de 1 cm, seuls conviendront les corps dont la conductivité est supérieure à 0,044, c'est-à-dire la plupart des métaux et alliages *mais non les réfractaires*.

Ces résultats ne sont, bien entendu, valables qu'au voisinage de la température ambiante. Si maintenant on opère au voisinage d'une température élevée que se passe-t-il ?

— Le coefficient h_1 qui ne dépend que de l'écart entre les températures du signal et de l'enceinte ne doit pas varier;

— le coefficient h_2 par contre, devrait varier comme T_{0K}^3 c'est-à-dire augmenter dans des proportions considérables (à 500° C il devrait en particulier être dix-huit fois plus important qu'à 20° C);

TABLEAU I

D (cm)	λ ($\varepsilon = 0$)	λ ($\varepsilon = 1$)
0,36	0,140	0,179
0,50	0,085	0,113
0,75	0,046	0,075
1,00	0,030	0,044
1,50	0,0165	0,026
2,00	0,0106	0,0176
2,50	0,0075	0,0131
3,00	0,0058	0,0104
4,00	0,0037	0,0072
5,00	0,0028	0,0056

— le coefficient h_3 doit, lui aussi, augmenter, d'une part, parce que l'air ambiant devient plus conducteur ($\lambda' = 1,335 \cdot 10^{-4}$ à 500° C) et, d'autre part, parce qu'on est obligé de se placer dans une enceinte de dimensions forcément limitées, ce qui diminue le diamètre. Ainsi pour un four de diamètre 6 cm, $h_3 = 1,5 \cdot 10^{-4}$ à 500° C; ceci suppose naturellement les effets terminaux négligeables; de toutes façons h_3 est toujours négligeable devant h_2 .

Le coefficient global $h = h_1 + h_2 + h_3$ augmente donc certainement avec la température. Le tableau VII (p. 60) le prouve amplement.

La loi de variation est d'ailleurs voisine, tout au moins pour les températures élevées, d'une loi linéaire en T_K^3 .

Si nous choisissons pour h la valeur 0,003 correspondant très approximativement à la température de 650° C, quelles seront alors les dimensions optimales de la barre? En prenant toujours un amortissement de 1/250°, la longueur minimale est donnée par les relations (5) et (6) :

$$m_0 L = 5,5, \quad L^2 = 7,5 \frac{\lambda D}{h}.$$

Il est encore souhaitable que la distance l entre les deux points de mesure soit telle que $m_0 l = 1$, par suite, nous pouvons dresser le tableau suivant (tabl. II) donnant pour chaque valeur du produit λD la longueur minimale L de la barre et la distance l correspondante, donnée par :

$$l = \frac{L}{5,5}.$$

TABLEAU II

λD	L (cm)	l (cm)
0,5	35,4	6,45
0,4	31,6	5,75
0,3	27,4	4,97
0,2	22,4	4,07
0,1	15,8	2,87
0,08	14,1	2,56
0,06	12,2	2,22
0,04	10,0	1,82
0,02	7,1	1,29

Ainsi si $\lambda D = 0,06$, ce qui, dans le cas où $D = 1$ cm, correspond à $\lambda = 0,06$, on peut fort bien opérer sur une barre de 12,2 cm de longueur, la distance entre prises de températures étant de 2,22 cm.

Si l'on désire uniquement connaître la diffusivité à haute température, on peut donc fort bien utiliser une éprouvette de longueur réduite.

2. — Isothermicité.

Il est important, d'autre part, de savoir si les valeurs de λ et de D , calculées précédemment à partir des considérations d'amortissement, sont compatibles avec l'uniformité de température dans la section droite de l'éprouvette.

Ce nouveau problème a été résolu de la façon suivante [24].

La température dans la masse est solution de :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (7)$$

avec, comme condition limite superficielle :

$$-2\pi\lambda R \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_R = 2\pi R h T.$$

D'autre part, la répartition de température suivant l'axe est donnée par :

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) = \frac{hp}{\lambda s} T_R = \frac{2h}{\lambda R} T_R.$$

En assimilant la température près cet axe à une expression de la forme :

$$T = T_0 + Ax + Bx^2 + Cx^2$$

on a naturellement :

$$B = \frac{h}{\lambda R} T_R, \quad C = \frac{hT_R}{2\lambda R}.$$

Le défaut d'isothermicité est précisément Cx^2 , c'est-à-dire au voisinage de la surface $Cx^2 = \frac{hRT_R}{2\lambda}$, l'anisothermie relative étant caractérisée par le coefficient $\frac{hR}{2\lambda}$.

Dans le cas d'une barre de fer de rayon $R = 0,5$ cm, on a

$$\text{pour : } \begin{cases} \lambda = 0,16 \\ h = 0,0004 \end{cases} \quad (\text{basse température}) \quad \frac{hR}{2\lambda} = 0,000625$$

$$\text{et pour : } \begin{cases} \lambda = 0,08 \\ h = 0,003 \end{cases} \quad (\text{température élevée}) \quad \frac{hR}{2\lambda} = 0,01;$$

dans tous les cas l'anisothermie est peu accusée.

Dans le cas d'une barre peu conductrice d'acier inoxydable de rayon $R = 0,5$ cm

$$\text{on a pour : } \begin{cases} \lambda = 0,04 \\ h = 0,0004 \end{cases} \quad \frac{hR}{2\lambda} = 0,0025$$

$$\text{et pour : } \begin{cases} \lambda = 0,06 \\ h = 0,003 \end{cases} \quad \frac{hR}{2\lambda} = 0,0125;$$

l'anisothermie est plus accentuée quoique encore négligeable.

3. — Détermination de la période optimale.

Quelle est, d'autre part, la meilleure valeur pour la période du signal thermique, valeur compatible avec la plus grande précision possible de la mesure de la diffusivité? [25].

Revenons pour cela aux formules (4) :

$$m_1^2 = \mu_1^2 = m_0^2 = \frac{hp}{\lambda s}, \quad m_1 \mu_1 = \frac{\pi c \rho}{\lambda \tau}.$$

μ_1 doit naturellement être inférieur à m_1 . Mais, d'après la seconde égalité, la diffusivité qui se déduit du produit $m_1 \mu_1$, ne peut être correctement déterminée que si $m_1 \mu_1$ n'est pas trop petit, c'est-à-dire s'il en est de même pour μ_1 le plus petit facteur. Mais si μ_1 est voisin de m_1 , le coefficient $\frac{hp}{\lambda s}$ est, de ce fait mal défini.

Il faut donc que $m_1^2 = \mu_1^2$ ne soit pas trop petit ainsi que $m_1 \mu_1$, ce qui se produit si μ_1 est une fraction de m_1 ($\mu_1 = km_1$) on a alors :

$$m_1^2 = \frac{m_0^2}{1 - k^2} = \frac{\pi c \rho}{k \lambda \tau}.$$

d'où :

$$\tau = \pi c \rho \frac{D}{4h} \frac{1 - k^2}{k}.$$

La durée de la période optimale ne dépend donc pas directement de la conductivité, mais seulement de la chaleur spécifique c et de la densité ρ .

Il est curieux de constater, du fait de la quasi-constance du produit $c\rho$, que, pour un même diamètre et pour un même coefficient h , cette période optimale est toujours la même, quel que soit le matériau.

Pour une éprouvette de fer de diamètre $D = 1$ cm, $c\rho = 0,87$

— si $h = 0,0004$ (basse température) et si $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\tau \approx 2000$ s.

— si $h = 0,003$ (haute température) et si $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\tau \approx 260$ s.

Tout cela suppose naturellement que l'on puisse agir sur la durée du signal thermique ce qui n'est pas toujours le cas, en particulier si le refroidissement est naturel et non commandé.

La période optimale est d'autant plus petite que la température est plus élevée, ce qui est fort heureux : en effet, nous verrons que, du fait du montage employé, il est relativement plus facile d'avoir à haute température une période courte.

VI. — ESSAI DE RÉALISATION SIMPLE D'UN SIGNAL THERMIQUE SINUSOIDAL

1. — Principe.

Si la méthode du signal sinusoïdal a déjà été utilisée, elle n'a pas été employée de façon systématique pour les mesures de diffusivité thermique. Cela tient aux difficultés d'obtention du signal ainsi qu'à la longueur du dépouillement. Le but actuel de ce travail est de simplifier et de codifier les deux parties : expérience proprement dite et dépouillement, tout en évitant délibérément de négliger l'une au profit de l'autre.

Si l'on se borne uniquement aux basses températures et si l'on dispose de barres suffisamment longues, la seule vraie difficulté consiste dans la réalisation du régime sinusoïdal. En effet, imposer en régime stationnaire une température en une section droite de la barre, c'est déjà implicitement supposer que l'on connaît les valeurs de λ et de h au voisinage de cette section droite. Si l'on se donne une barre pour laquelle, au voisinage du chauffeoir, λ et h sont inconnus, on ne peut imposer une température en un point voisin de ce chauffeoir qu'en travaillant par approximation ou retouches successives, à plus forte raison lorsqu'on opère en régime transitoire : les approximations successives doivent avoir lieu pendant un temps aussi court que possible par rapport à la période du phénomène thermique, d'où la nécessité d'une prise de température de faible inertie (couple thermo-électrique) et d'un appareil d'enregistrement de la température à réponse rapide.

Ainsi, avec un potentiomètre à grande vitesse d'enregistrement, on peut, sans le secours d'aucun variateur à came, imposer une température sinusoïdale. Il suffit de tracer au préalable sur le papier d'enregistrement la sinusoïde programme théorique que l'on désire suivre. Il semble donc qu'un opérateur puisse facilement, en agissant à la main sur un variac et en observant constamment l'indication de l'appareil, imposer le signal souhaité.

2. — Expérience.

MESURE DE LA DIFFUSIVITÉ THERMIQUE DU FER ARMCO FRANÇAIS.

La barre étudiée avait 11 mm de diamètre, 1 m de longueur.

Le problème de la mesure des températures — problème si ardu autrefois — est aujourd'hui considérablement simplifié : les couples thermo-électriques sont maintenant d'un usage courant et il est très facile de se procurer des fils de 0,2 ou même de 0,1 mm de diamètre; l'inertie de la source chaude est pratiquement négligeable; il en est de même pour la déperdition calorifique par les fils eux-mêmes. De plus, ceux-ci étant fort bien définis du point de vue physico-chimique, l'étalonnage pose de moins en moins de problèmes (1).

(1) La Société Philips a récemment mis au point le microconducteur « Thermocoax » qui n'est autre qu'une gaine de 1 mm de diamètre environ constituée par un alliage inoxydable jouant un rôle de protection mécanique, chimique et électrique et dans laquelle sont placés les deux conducteurs formant les deux éléments du couple, ceux-ci étant isolés l'un de l'autre et de la gaine par un isolant réfractaire.

Quant aux appareils de mesure, il en existe maintenant de nombreux types spécialement conçus pour des enregistrements multiples et rapides de température. Le potentiomètre électronique Philips dont nous disposons (*fig. 4*) offrait de grandes possibilités, sa vitesse de déroulement de papier pouvant atteindre 600 mm/h, l'inter-

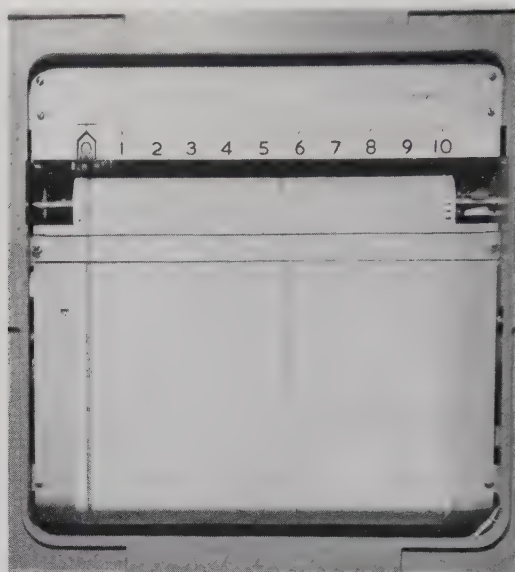


Fig. 4. — Potentiomètre électronique à pointés rapides

valle entre deux pointés consécutifs étant de l'ordre de 2 s. Il nous était, en particulier, très facile d'enregistrer, en plus du signal émis, trois signaux reçus à des différentes distances du point d'émission.

Dans le cas présent, les prises de températures étaient constituées par des couples BTE-NTE de 0,1 mm de diamètre. Il est certes de beaucoup préférable de souder directe-



Fig. 5. — Poste de soudure

ment les couples sur la barre, aussi avons-nous réalisé un petit poste de soudure électrique constitué essentiellement par un transformateur d'intensité et un support métallique d'éprouvette (*fig. 5*). Mais il arrive souvent que l'on ait besoin d'isoler électriquement les soudures chaudes les unes des autres. C'est le cas en particulier

si l'on désire opposer simultanément à la f.e.m. de plusieurs couples la même tension; ceux-ci ont nécessairement alors une borne commune, d'où l'absolue nécessité d'isoler les soudures les unes des autres.

Ce qui n'est pas indispensable dans le cas actuel (nous aurions pu souder les couples) le devient si, opérant au voisinage d'une température élevée, on veut garder à la méthode toute sa valeur, en restant sur la plus grande sensibilité du potentiomètre. En conséquence, nous avons percé dans la barre quatre trous borgnes de 2 mm de diamètre, et équidistants de 50 mm. Dans ces trous, nous avons disposé d'abord un peu d'amiante, puis, à frottement dur, de petites cannes pyrométriques bifilaires en alumine de 5 mm de longueur environ et de diamètre 2 mm. Les soudures des couples sont isolées grâce à la bourre d'amiante disposée au fond du trou.

Cette méthode de prise de température a été adoptée dans la plupart de nos expériences bien qu'elle perturbe quelque peu le flux thermique. Or, M. VERNOTTE [26] a montré que, pourvu que les conditions de mesure de température soient les mêmes en tous les points de mesure, la valeur trouvée est toujours la même fraction de la température vraie (celle-ci étant comptée à partir de la température ambiante). Il résulte que, si les calculs d'où l'on doit tirer les propriétés thermiques ne mettent en jeu que des rapports de température (et c'est précisément le cas ici), les résultats seront corrects bien que les températures soient normalement un peu faussées.

Le chauffeoir était constitué par quelques spires d'un fil résistant RNC 3 bobiné sur un petit tube d'alumine. L'ensemble est représenté sur la *figure 6*.

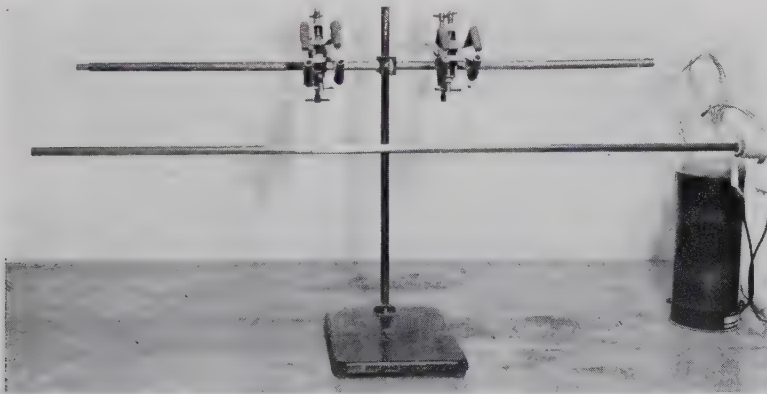


Fig. 6. — La barre semi-infinie

Pour des températures peu élevées ou de petits intervalles de température, nous pouvons admettre pour les couples une réponse linéaire ($41,5 \mu\text{V}$ par degré).

Le refroidissement s'effectuant naturellement c'était donc lui qui devait principalement imposer la période. Le seul paramètre sur lequel nous pouvions vraiment agir était l'amplitude du signal; en choisissant celle-ci égale à 2 mV, cela entraînait une période de 2 160 s.

La température ambiante était maintenue constante par climatisation de la pièce; elle était mesurée au voisinage (quelques centimètres) de la deuxième prise de

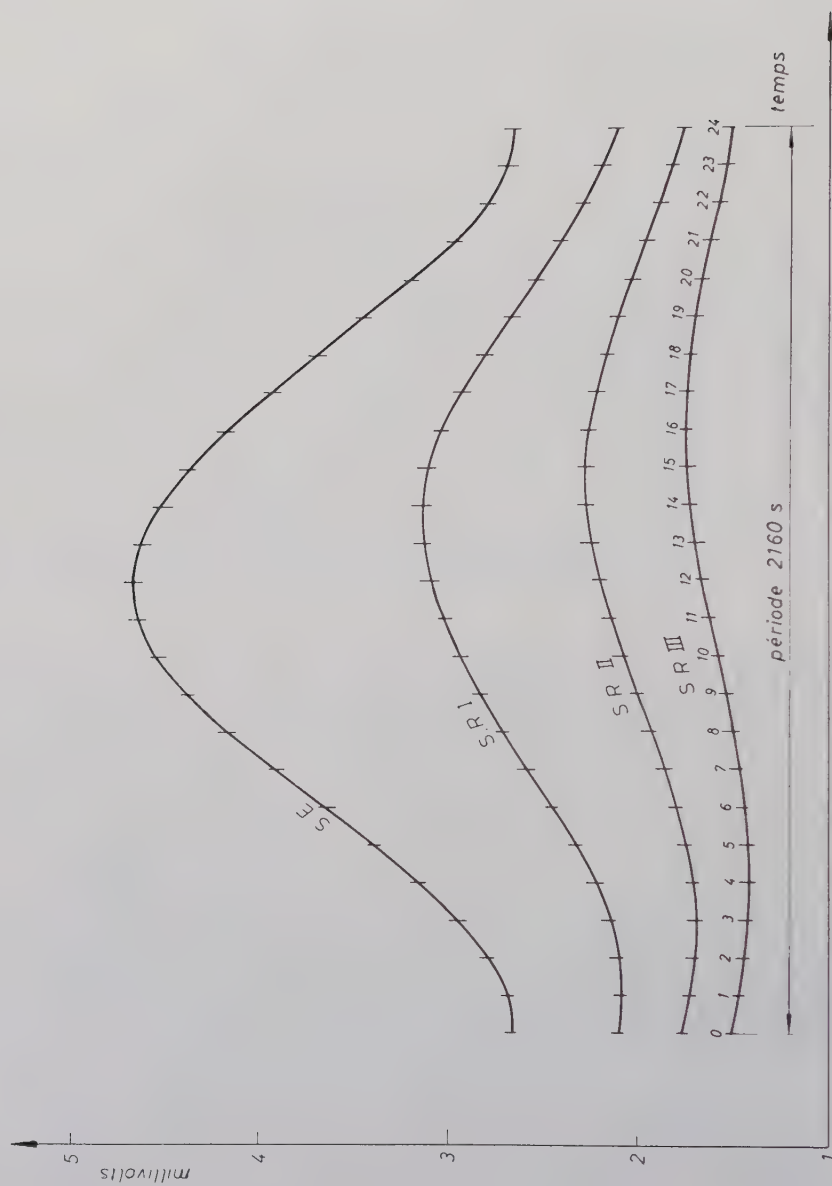


Fig. 7. — Courbes I. — Signaux thermiques dans une barre de fer semi-infinie.
Température ambiante 0,95 mV — Couples BTE-NTE.

température au moyen d'un autre couple BTE-NTE (un thermomètre eut nécessité préalablement l'établissement de la table de correspondance couple-graduation). Dans l'expérience actuelle, cette température était de 0,95 mV soit 22° 9 et était nécessairement supposée constante tout le long de la barre. En fait, elle était certainement plus ou moins perturbée au voisinage du chauffoir.

La courbe programme étant tracée sur le papier d'enregistrement, l'expérience ne présente guère de difficulté; quatre ou cinq cycles thermiques sont toutefois nécessaires avant que le régime périodique (*fig. 7*, courbes I) ne soit établi.

VII. — MÉTHODE DE DÉPOUILLEMENT

1. — Principe.

D'après la théorie précédemment développée, signaux émis et reçu sont sinusoïdaux, tout au moins en première approximation. Nous avons néanmoins recherché leur expression algébrique au moyen de l'analyse harmonique.

Il existe pour cela de nombreuses méthodes mécaniques, graphiques et numériques. Après avoir essayé l'analyseur de MADER-OTT qui est d'un emploi assez peu commode, nous avons adopté la méthode numérique préconisée par E. WHITTAKER [P]. Cette méthode permet, grâce à un système de grilles (*fig. 8*) de déterminer à partir de

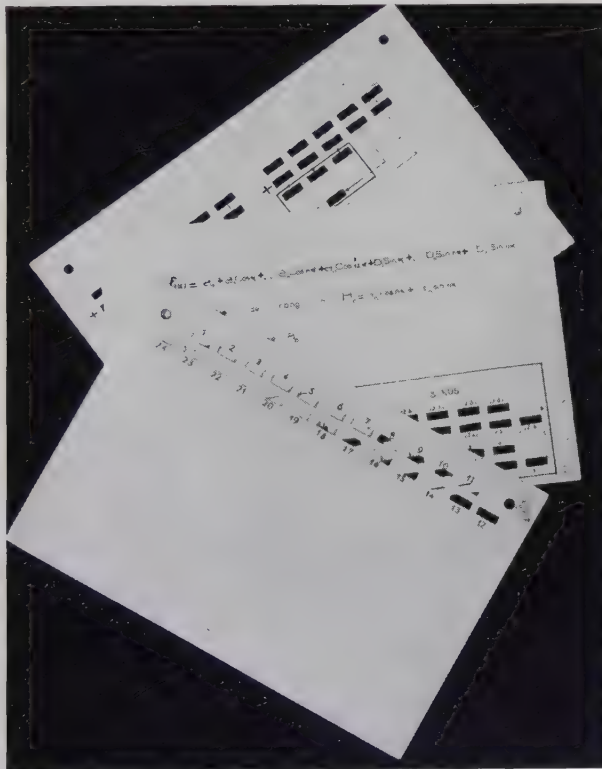


Fig. 8. — Grilles pour analyse harmonique

vingt-quatre intervalles les vingt-quatre premiers coefficients de la série de FOURIER. Les calculs, qui se font automatiquement, se ramènent à des groupements de termes : additions, soustractions et quelques multiplications. La recherche du fondamental et des douze premiers harmoniques demande moins de 1 h, celle du fondamental seul environ 25 mn (tabl. III).

Il est certes possible de rechercher les coefficients de FOURIER avec une précision supérieure en prenant par exemple quarante-huit intervalles ou même plus; mais le calcul devient alors fort long et ne saurait être répété souvent.

Lors du dépouillement des courbes précédentes, nous devons tenir compte du fait que l'on ne peut suivre rigoureusement le signal programme. On peut, surtout au voisinage des extremums, commettre une erreur d'une demi-division du papier d'enregistrement soit $1/40 = 0,025$ mV. Il s'ensuit, nous allons le voir, que le signal émis ne peut se mettre sous la forme $A - B \cos 2\pi \frac{t}{\tau}$, simple fait qui aura de grosses conséquences.

2. — Résultats sur le fer Armco.

Les décompositions en série de FOURIER ont donné pour le signal émis (SE) et pour les signaux reçus (SR_I), (SR_{II}), (SR_{III}) les températures étant évaluées en millivolts, les expressions suivantes :

$$(SE) : \quad 3,6661 - 0,9988 \cos 2\pi \frac{t}{\tau} - 0,01084 \sin 2\pi \frac{t}{\tau}.$$

L'amplitude et la phase sont données par :

$$M = 0,99885, \quad \varphi = 0,01085$$

d'où la notation équivalente :

$$(SE) : \quad 3,6661 - 0,99885 \cos \left(2\pi \frac{t}{\tau} - 0,01085 \right).$$

Remarquons que le signal émis, rigoureusement sinusoïdal en théorie ($M = 1$, $\varphi = 0$), ne l'est pas en pratique.

On a en outre :

$$(SR_I) : \quad 2,6121 - 0,4855 \cos 2\pi \frac{t}{\tau} - 0,1813 \sin 2\pi \frac{t}{\tau},$$

d'où la notation équivalente :

$$(SR_I) : \quad 2,6121 - 0,51822 \cos \left(2\pi \frac{t}{\tau} - 0,35738 \right);$$

$$\text{et :} \quad (SR_{II}) : \quad 1,9766 - 0,2163 \cos 2\pi \frac{t}{\tau} - 0,1835 \sin 2\pi \frac{t}{\tau};$$

d'où la notation :

$$(SR_{II}) : \quad 1,9766 - 0,28365 \cos \left(2\pi \frac{t}{\tau} - 0,70359 \right).$$

TABLEAU III

$$3,6661 - 0,9988 \cos 2\pi \frac{t}{\tau} - 0,01084 \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$$

2,660	2,675	2,795	2,960	3,185	3,385	3,625	3,950	4,160	4,360	4,520	4,610
2,660	2,685	2,800	2,950	3,170	3,435	3,700	3,935	4,175	4,400	4,510	4,610
2,660	5,360	5,595	5,910	6,355	6,820		0,015	— 0,015	— 0,040	0,010	0,000
4,660	9,220	9,030	8,760	8,335	7,885		— 0,050	0,015	0,010	— 0,005	— 0,010
7,320	14,580	14,625	— 2,850	— 1,980	— 1,065		— 0,035	0,000	— 0,030	— 0,015	— 0,010
7,325	14,705	14,690	2,850	— 0,990	— 0,276		— 0,0338	0,000		0,030	— 0,035
14,645	29,285		2,015	— 3,435	— 3,860	— 0,0091	— 0,010	0,005			0,050
7,3225	14,6425		— 4,006	— 2,975	— 3,730	— 1,000	— 0,0026	— 0,075			
29,315	14,670			— 2,000			— 0,0212	0,0025			
14,6575	7,3350			— 2,990	— 1,000		— 0,0364	— 0,0725			
21,9800	— 5,965						— 0,0576				
21,9775	— 6,021						— 0,0725				
43,9575	— 11,986						— 0,1301				
3,6661	— 0,9988						— 0,01084				

et $(\text{SR}_{\text{III}}) : 1,5742 - 0,0805 \cos 2\pi \frac{t}{\tau} - 0,1369 \sin 2\pi \frac{t}{\tau},$

d'où : $(\text{SR}_{\text{III}}) : 1,5742 - 0,15882 \cos \left(2\pi \frac{t}{\tau} - 1,03922 \right).$

La période commune τ de ces quatre signaux a été prise égale à 2 160 s.

— Les signaux (SE) et (SR_I) donnent :

$$e^{-m_1 x} = 0,51882, \quad \text{d'où} \quad m_1 = 0,1312;$$

$$\mu_1 x = 0,34653, \quad \text{d'où} \quad \mu_1 = 0,06931.$$

Par suite : $\frac{\lambda}{c \rho} - \frac{\pi}{m_1 \mu_1 \tau} = 0,1602.$

VÉRIFICATION. — Elle nécessite la connaissance de la température ambiante supposée constante, ce qui, dans le cas actuel, est certainement très inexact vu l'amplitude du signal émis.

Néanmoins, celle-ci a été mesurée au voisinage de la partie médiane de la barre et a été trouvée égale à 0,95 mV.

Nous avons donc :

$$e^{-m_0 x} = \frac{2,6121 - 0,95}{3,6661 - 0,95} = 0,6118, \quad \text{d'où} \quad m_0 = 0,0982,$$

$$m_0^2 = 0,00964 \quad \text{et} \quad m_1^2 - \mu_1^2 = 0,01236.$$

La vérification est donc médiocre.

Nous admettrons que la température correspondant à la valeur de $\frac{\lambda}{c \rho}$ est la demi-somme des températures moyennes des signaux (SE) et (SR_I) soit 3,139 mV.

— Les signaux (SE) et (SR_{II}) donnent, pour la température moyenne de 2,8213 mV :

$$e^{-m_1 x} = 0,28397, \quad \text{d'où} \quad m_1 = 0,1259,$$

$$\mu_1 x = 0,69274, \quad \mu_1 = 0,06927$$

$$\text{et} \quad \frac{\lambda}{c \rho} = 0,1664.$$

VÉRIFICATION.

$$e^{-m_0 x} = \frac{1,9766 - 0,95}{3,6661 - 0,95} = 0,3777, \quad \text{d'où} \quad m_0 = 0,0973,$$

$$m_0^2 = 0,00947 \quad \text{et} \quad m_1^2 - \mu_1^2 = 0,01108.$$

La vérification est déjà meilleure.

— Les signaux (SE) et (SR_{III}) donnent, pour la température de 2,6201 mV :

$$\begin{aligned} e^{-m_1 x} &= 0,15902, & \text{d'où} & & m_1 &= 0,1202, \\ \mu_1 x &= 1,0284, & & & \mu_1 &= 0,06856, \\ & \text{et} & & & \frac{\lambda}{c \rho} &= 0,1764 \end{aligned}$$

VÉRIFICATION.

$$\begin{aligned} e^{-m_0 x} &= \frac{1,5742 - 0,95}{3,6661 - 0,95} = 0,2298, & \text{d'où} & & m_0 &= 0,098 \\ m_0^2 &= 0,0096 & \text{et} & & m_1^2 - \mu_1^2 &= 0,00994. \end{aligned}$$

La vérification est donc encore améliorée.

— Les signaux (SR_I) et (SR_{II}) donnent, pour la température de 2,2943 mV :

$$\begin{aligned} e^{-m_1 x} &= 0,54734, & \text{d'où} & & m_1 &= 0,120, \\ \mu_1 x &= 0,3462, & & & \mu_1 &= 0,0690 \\ & \text{et} & & & \frac{\lambda}{c \rho} &= 0,1752. \end{aligned}$$

VÉRIFICATION.

$$\begin{aligned} e^{-m_0 x} &= \frac{1,9766 - 0,95}{2,6121 - 0,95} = 0,6176, & \text{d'où} & & m_0 &= 0,0964, \\ m_0^2 &= 0,00929 & \text{et} & & m_1^2 - \mu_1^2 &= 0,00977. \end{aligned}$$

— Les signaux (SR_I) et (SR_{III}) donnent, pour la température moyenne de 2,0931 mV :

$$\begin{aligned} e^{-m_1 x} &= 0,30647, & \text{d'où} & & m_1 &= 0,1183, \\ \mu_1 x &= 0,6818, & & & \mu_1 &= 0,06818 \\ & \text{et} & & & \frac{\lambda}{c \rho} &= 0,1803. \end{aligned}$$

VÉRIFICATION.

$$\begin{aligned} e^{-m_0 x} &= \frac{1,5742 - 0,95}{2,6121 - 0,95} = 0,3755, & \text{d'où} & & m_0 &= 0,0980, \\ m_0^2 &= 0,00960 & \text{et} & & m_1^2 - \mu_1^2 &= 0,00936. \end{aligned}$$

— Les signaux (SR_{II}) et (SR_{III}) donnent, pour la température moyenne de 1,7754 mV :

$$\begin{aligned} e^{-m_1 x} &= 0,5599, & \text{d'où} & & m_1 &= 0,1160, \\ \mu_1 x &= 0,33563, & & & \mu_1 &= 0,06713 \\ & \text{et} & & & \frac{\lambda}{c \rho} &= 0,1867. \end{aligned}$$

VÉRIFICATION.

$$e^{-m_0\omega} = \frac{1,5742 - 0,95}{1,9766 - 0,95} = 0,6080, \quad \text{d'où} \quad m_0 = 0,0998,$$

$$m_0^2 = 0,00996 \quad \text{et} \quad m_1^2 - \mu_1^2 = 0,00925$$

RÉSUMÉ.

Nous représentons ci-dessous (tabl. IV) les variations de la diffusivité en fonction de la température.

TABLEAU IV

SE et SR	Température moyenne (mV)	Température moyenne (°C)	$\frac{\lambda}{c\rho}$
SE et SR _I	1,7754	42,7	0,1867
SE et SR _{II}	2,0931	50,4	0,1803
SE et SR _{III}	2,2943	55,1	0,1752
SR _I et SR _{II}	2,6201	63,1	0,1764
SR _I et SR _{III}	2,8213	68,0	0,1664
SR _{II} et SR _{III}	3,1390	75,5	0,1602

Sauf pour les valeurs 0,1752 et 0,1764 qui sont manifestement quelque peu erronées, on voit que la méthode est suffisamment sensible pour mettre en évidence une décroissance de la diffusivité en fonction de la température, mais le fait de supposer $\frac{\lambda}{c\rho}$ et $\frac{hp}{\lambda s}$ constants dans un intervalle de température ne permet pas de connaître le coefficient de température.

Si l'on désire, et c'est le but final de cette étude, la valeur de la conductivité λ , il nous faut connaître la chaleur spécifique c et la densité ρ .

Or, les tables [Q] donnent :

$$\rho = 7,87, \quad c = \begin{matrix} 0,106 \text{ à } 20^\circ \text{ C,} \\ 0,114 \text{ à } 100^\circ \text{ C.} \end{matrix}$$

Par suite, nous pourrions admettre, pour la chaleur spécifique, une variation linéaire en fonction de la température, d'où le tableau V.

TABLEAU V

Température moyenne (°C)	$\frac{\lambda}{c\rho}$	$c\rho$	λ
42,7	0,1867	0,852	0,159
50,4	0,1803	0,858	0,1545
55,1	0,1752	0,8615	0,151
63,1	0,1764	0,868	0,153
68,0	0,1664	0,872	0,145
75,5	0,1602	0,878	0,141

Les valeurs de λ que nous venons de trouver ne sont pas comparables aux valeurs indiquées dans les tables, relativement au fer Armco américain. Cela tient au fait que le fer Armco français en provenance de Commentry est déjà de par sa composition (0,03 C — 0,2 Si — 0,4 Mn) un acier, ce qui abaisse déjà considérablement la valeur de la conductivité thermique.

Nous ne pouvons donc comparer nos résultats qu'avec les chiffres relatifs à un acier de composition aussi voisine que possible. Ainsi, pour l'acier de composition 0,05 C — 0,4 Mn, les tables indiquent :

$$\begin{array}{llll} \rho = 7,87 & \begin{array}{l} \text{à } 20^{\circ} \\ \text{à } 100^{\circ} \end{array} & \begin{array}{l} c = 0,106, \\ c = 0,115, \end{array} & \begin{array}{l} \lambda = 0,156. \\ \lambda = 0,144, \end{array} \end{array}$$

Ces chiffres se rapprochent beaucoup de ceux que nous avons trouvés. L'on remarque également l'importante variation de λ en fonction de la température.

Il peut être intéressant de préciser les valeurs de h .

Nous prendrons comme valeurs de $\frac{hp}{\lambda s}$ celles déduites de l'analyse harmonique soit $m_1^2 - \mu_1^2$, car on ne commet pas d'erreur sur l'origine des températures (qui est ici

la température ambiante, d'ailleurs quelque peu variable le long de la barre), et par là, les déterminations seront plus précises (tabl. VI).

TABLEAU VI

SE et SR.....	$\frac{hp}{\lambda s} = \frac{4h}{\lambda D}$	h
SE et SR _I	0,01236	0,000480
SE et SR _{II}	0,01108	0,000442
SE et SR _{III}	0,00994	0,000418
SR _I et SR _{II}	0,00977	0,000406
SR _I et SR _{III}	0,00935	0,000398
SR _{II} et SR _{III}	0,00925	0,000405

Ces valeurs sont très vraisemblables et de plus, elles mettent en évidence la variation régulière de h avec la température dans le cas actuel où la température ambiante est supposée constante et égale à 0,95 mV (22° 9).

VIII. — PRÉCISION DE LA MÉTHODE

Sur cette simple expérience, nous pouvons d'ores et déjà faire les remarques suivantes :

1. — Précision de l'expérience.

Si l'on se réfère au test $m_1^2 - \mu_1^2 = m_0^2$, on voit que la première détermination de la diffusivité à partir des signaux (SE) et (SR_I) est mauvaise. Cela est dû probablement à la trop grande amplitude du signal émis (2 mV, soit 48°) et au fait qu'au voisinage des deux premières prises de température, la température ambiante doit être fortement perturbée par le voisinage du chauffoir.

Une détermination plus précise suppose une amplitude plus réduite, ce qui était prévisible, la constance des coefficients $\frac{cp}{\lambda}$ et $\frac{hp}{\lambda s}$ étant mieux assurée. Une amplitude de 20 à 30° est donc souhaitable. On n'a d'ailleurs pas intérêt à descendre au-dessous de ces chiffres, la précision du dépouillement laissant alors, nous le verrons, à désirer.

2. — Précision du dépouillement.

Elle est tout d'abord limitée par le fait qu'on ne peut jamais, nous l'avons vu, imposer un signal rigoureusement sinusoïdal; il y a toujours un écart, si petit soit-il,

entre le signal théorique et le signal réel. D'autre part, la méthode de dépouillement introduit ensuite une autre imprécision; c'est pour cette raison qu'on trouvera toujours des harmoniques, peu importants il est vrai, mais dont on ne saurait quand même nier l'existence. La méthode du signal sinusoïdal ne résiste donc pas à un examen approfondi.

Les coefficients des harmoniques doivent, d'autre part, d'après le théorème classique relatif aux coefficients des termes de la série de FOURIER, décroître uniformément. Or, il s'avère que du fait de l'imprécision relative croissante, et du nombre limité des termes de notre développement, les coefficients trouvés ne sont pas nécessairement décroissants. Il s'ensuit que :

a) L'on ne peut tirer aucune conséquence à partir de l'harmonique 2. Ce fait s'oppose quelque peu aux conclusions de M. VERNOTTE [27] relatives à la possibilité de calculer le coefficient de température de la conductivité à partir de cet harmonique;

b) Si l'on effectue sur ce même harmonique des opérations identiques à celles qui viennent d'être effectuées sur le fondamental, les résultats qui devraient, la théorie l'indique, être identiques, ne le sont plus, les écarts étant même assez importants.

Comment peut-on évaluer les erreurs affectant les coefficients de FOURIER, connaissant l'erreur probable ε commise sur les mesures $y_1, y_2, \dots y_{24}$.

Désignons par η_n l'erreur probable commise sur le coefficient a_n .

Chaque coefficient de la série est une fonction linéaire des 24 grandeurs $y_1, y_2, \dots y_{24}$

$$a = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_{24} y_{24};$$

L'erreur probable da sur a est donnée par :

$$da = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_{24}^2)^{\frac{1}{2}} \varepsilon.$$

Dans le cas de 24 ordonnées, on a naturellement pour le premier coefficient :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_{24} = 1 \quad \text{et} \quad y_1 + y_2 + \dots + y_{24} = 24 a_0.$$

L'erreur probable sur $24 a_0$ est donnée par :

$$d(24 a_0) = \sqrt{24} \varepsilon,$$

d'où :

$$\eta_0 = da_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{24}} = 0,204 \varepsilon.$$

Pour les autres coefficients a_1 et b_1 , les coefficients $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{24}$ ne sont autres que $\sin \frac{2\pi x_n}{\tau}$ et $\cos \frac{2\pi x_n}{\tau}$, par suite, les erreurs probables sur a_1 et b_1 sont données par :

$$d(24 a_1) = \left[\sin^2 \frac{2\pi x_1}{\tau} + \sin^2 \frac{2\pi x_2}{\tau} + \dots + \sin^2 \frac{2\pi x_{24}}{\tau} \right]^{\frac{1}{2}} \varepsilon,$$

$$d(24 b_1) = \left[\cos^2 \frac{2\pi x_1}{\tau} + \cos^2 \frac{2\pi x_2}{\tau} + \dots + \cos^2 \frac{2\pi x_{24}}{\tau} \right]^{\frac{1}{2}} \varepsilon.$$

Les expressions entre crochets se déduisent des valeurs quadratiques moyennes :

$$\int_0^\tau \sin^2 \frac{2\pi x}{\tau} dx \quad \text{et} \quad \int_0^\tau \cos^2 \frac{2\pi x}{\tau} dx,$$

par suite :

$$d(24a_1) = \sqrt{12}\varepsilon \quad \text{et} \quad \eta_1 = da_1 = db_1 = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{12}} = 0,145\varepsilon.$$

Si $\varepsilon = 0,005$ (c'est sensiblement la précision maximale du graphique; elle correspond à 0° 12 C dans le cas d'un couple BTE-NTE) on a alors : $\eta = 0,00073$.

Ceci étant, considérons à nouveau les deux signaux dont les décompositions en série de FOURIER ont donné pour les fondamentaux :

$$\begin{aligned} a'_0 + a' \sin 2\pi \frac{t}{\tau} - b' \cos 2\pi \frac{t}{\tau}, & \quad \text{avec} \quad \text{tg } \varphi' = -\frac{b'}{a'}, \quad M' = \sqrt{a'^2 + b'^2}, \\ a_0 + a \sin 2\pi \frac{t}{\tau} - b \cos 2\pi \frac{t}{\tau}, & \quad \text{tg } \varphi = -\frac{b}{a}, \quad M = \sqrt{a^2 + b^2}; \end{aligned}$$

on en déduit facilement :

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2x} \text{Log} \frac{a^2 + b^2}{a'^2 + b'^2}, & \frac{dm}{m} &= \frac{1}{mx} \left[\frac{ada + bdb}{a^2 + b^2} - \frac{a'da' + b'db'}{a'^2 + b'^2} \right], \\ \mu &= \frac{1}{x} (\varphi - \varphi'), & \frac{d\mu}{\mu} &= \frac{1}{\mu x} \left[\frac{bda - adb}{a^2 + b^2} - \frac{b'da' - a'db'}{a'^2 + b'^2} \right], \\ \frac{d\left(\frac{\lambda}{c\rho}\right)}{\frac{\lambda}{c\rho}} &= \frac{dm}{m} + \frac{d\mu}{\mu} + \frac{d\tau}{\tau} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{\lambda}{c\rho}\right)}{\frac{\lambda}{c\rho}} &= \frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{x} \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{\mu} \right) \frac{da}{a^2 + b^2} + \frac{1}{x} \left(\frac{b}{\mu} - \frac{a}{\mu} \right) \frac{db}{a^2 + b^2} - \frac{1}{x} \left(\frac{a'}{m} - \frac{b'}{\mu} \right) \frac{da'}{a'^2 + b'^2} \\ &\quad + \frac{1}{x} \left(\frac{a'}{\mu} - \frac{b'}{m} \right) \frac{db'}{a'^2 + b'^2}. \end{aligned}$$

d'où l'expression de l'erreur relative probable :

$$\sqrt{\left(\frac{d\tau}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{1}{M^2} + \frac{1}{M'^2}\right) \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{\mu^2}\right) \frac{\eta^2}{x^2}}.$$

Dans ce calcul, on fait intervenir l'erreur relative $\frac{d\tau}{\tau}$ sur la période du signal, ce qui, *a priori*, semble illogique, car la durée du cycle thermique est précisément la grandeur sur laquelle on peut agir avec le maximum de précision. Or, si l'on veut maintenir rigoureusement constante l'amplitude du signal émis, il s'avère que, du fait du temps nécessaire à l'établissement du régime périodique entretenu, on est souvent

quelque peu amené à modifier la durée de la période, de là cette imprécision que nous avons introduite dans nos calculs. Il eut sans doute été plus correct, mais plus difficile, de déterminer l'erreur causée par une amplitude de signal quelque peu variable, la période restant rigoureusement constante, mais le résultat ne justifiant vraisemblablement pas la complication, nous nous sommes tenus au calcul d'erreur précédent.

Si l'on admet que $\frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{100}$ et si l'on se place dans le cas le plus défavorable qui correspond naturellement à M, M', m, μ petits, c'est-à-dire aux signaux SR_{II} et SR_{III} , l'erreur probable est voisine de 2,1 %. A cette erreur, si l'on ajoute celles, difficilement évaluables, dues à la non constance des termes $\frac{c\rho}{\lambda}$ et $\frac{hp}{\lambda s}$ et qui varient en sens inverse de l'amplitude (la meilleure précision suppose en effet des amplitudes aussi réduites que possible), on voit que la précision totale n'est pas très grande. Nous prendrons celle-là assez arbitrairement d'ailleurs égale à 4 % (soit approximativement le double de la dernière erreur évaluée).

Aussi, ne peut on guère déduire du tableau précédent donnant les valeurs de $\frac{\lambda}{c\rho}$ pour diverses températures moyennes, la loi exacte $\frac{\lambda}{c\rho} = f(T)$. Pour avoir cette loi plus exactement, il convient d'opérer chaque fois avec des amplitudes d'une vingtaine de degrés, l'écart moyen avec la température ambiante étant du même ordre de grandeur; il faut donc placer l'éprouvette dans une enceinte dont on fait varier la température.

Les conséquences que nous pouvons finalement tirer de notre étude relative aux signaux sinusoïdaux sont les suivantes :

— il est facile, et ce fut un des buts de notre expérience, de se fixer un programme sinusoïdal de température au voisinage de la température ambiante;

— mais il est infiniment plus difficile de réaliser d'une façon simple le signal sinusoïdal proprement dit, du fait, d'une part, des erreurs expérimentales dues à la difficulté que l'on éprouve à suivre ce programme et, d'autre part, des erreurs introduites lors du dépouillement;

— il serait à coup sûr beaucoup plus difficile, voire impossible, de réaliser ce signal au voisinage d'une température élevée.

La quasi-impossibilité de réaliser un signal rigoureusement sinusoïdal est probablement à la source des erreurs trop importantes qui ont entaché certains résultats fournis par cette méthode [15]. C'est précisément cette quasi-impossibilité qui nous a conduit à étudier plus spécialement au chapitre suivant le cas des signaux seulement périodiques. Cette nouvelle méthode, dont M. VERNOTTE a déjà montré la simplicité [28], s'impose maintenant, nous venons de le montrer, comme une absolue nécessité.

IX. LES SIGNAUX THERMIQUES PÉRIODIQUES

1. — Principe.

Cette nouvelle méthode dont nous avons montré précédemment le bien-fondé théorique et qui est en fait la seule applicable pratiquement, est fort simple.

Dans une section droite (en général à une extrémité de la barre), on émet un signal périodique quelconque; il en résulte en un point P voisin de cette section droite une variation périodique de la température T_P en fonction du temps t . C'est cette variation qui constitue le signal émis. Lorsque le régime est établi, la température en P est périodique. La loi $T_P(t)$, soumise à l'analyse harmonique, met en évidence un terme fondamental déphasé de θ par rapport au début de la période du phénomène complexe, mais de même période que le signal émis.

En un point Q quelconque de la barre, on observe également une température T_Q , fonction périodique du temps; la loi $T_Q(t)$, soumise elle aussi à l'analyse harmonique, met en évidence un terme fondamental déphasé de φ , mais de même période que le signal émis. C'est la comparaison des fondamentaux des deux signaux $T_P(t)$ et $T_Q(t)$ qui permet de calculer les coefficients $\frac{\lambda}{c\rho}$ et $\frac{hp}{\lambda s}$ de l'équation aux dérivées partielles (1). On voit immédiatement la grande simplification expérimentale que cette méthode entraîne : inutilité d'un programme sinusoïdal et de toutes les complications subséquentes. La précision n'en est d'ailleurs pas affectée pour autant, ainsi que nous allons le montrer.

2. — Expérience.

Effectuée sur la même barre que précédemment, la température ambiante était de 0,90 mV (21° 7) et la période de 790 s, un peu faible pour une bonne précision (fig. 9, courbes II).

L'analyse harmonique a donné :

$$\begin{aligned} \text{(SE)} : 1,7796 + 0,01189 \cos 2\pi \frac{t}{\tau} - 0,2072 \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \\ = 1,7796 + 0,2389 \sin \left(2\pi \frac{t}{\tau} + 2,62065 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(SR)} : 1,4346 + 0,0973 \cos 2\pi \frac{t}{\tau} - 0,04113 \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \\ = 1,4346 + 0,1057 \sin \left(2\pi \frac{t}{\tau} + 1,9706 \right), \end{aligned}$$

$$\text{d'où :} \quad \begin{array}{lll} e^{-m_1 x} = 0,4423, & m_1 = 0,163, & m_1^2 - \mu_1^2 = 0,0097 \\ \mu_1 x = 0,6500, & \mu_1 = 0,130, & \end{array}$$

$$\text{et :} \quad \frac{\lambda}{c\rho} = \frac{\pi}{m_1 \mu_1 \tau} = 0,187.$$

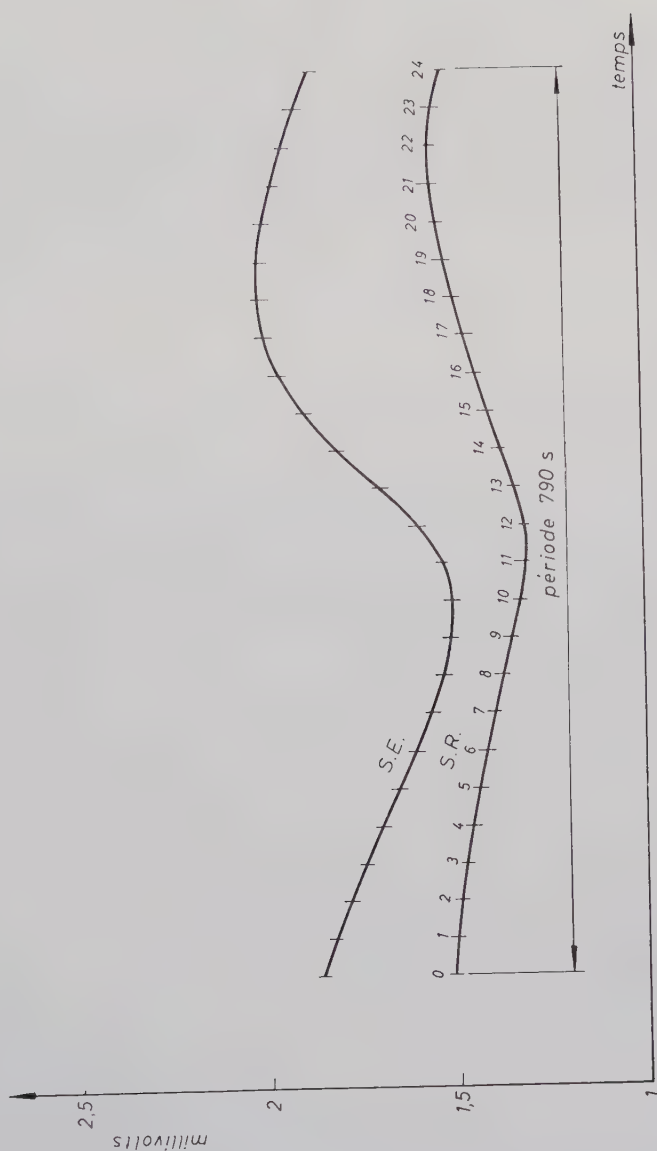


Fig. 9. — Courbes II. — Signaux thermiques périodiques dans une barre de fer semi-infinie.
Température ambiante 0,90 mV — Couples BTE-NTE

VÉRIFICATION.

Elle s'effectue de la même façon que précédemment :

$$e^{-m_0 x} = \frac{1,4346 - 0,90}{1,7796 - 0,90} = 0,6076,$$

d'où : $m_0 = 0,0998$ et $m_0^2 = 0,00996$.

La vérification est donc bonne.

La valeur (0,187) de la diffusivité, que nous venons de trouver et qui correspond à la température de 1,6071 mV (38° 7), est en bon accord avec la valeur 0,1867 trouvée précédemment pour 1,7754 mV (42° 7).

CHAPITRE II

LE PROBLÈME DE LA BARRE FINIE

I. — GÉNÉRALITÉS

L'étude de la barre semi-infinie nécessite naturellement une longueur telle qu'il soit possible de négliger les perturbations dues à la section libre non chauffée de la barre.

En fait, la longueur souvent prohibitive lorsqu'il s'agit d'éprouvettes taillées dans des matériaux nouveaux dont on ne possède souvent que de petites quantités, a conduit à modifier la méthode précédente de la façon suivante : afin d'éviter les phénomènes mal connus se passant aux extrémités de l'éprouvette, on chauffe précisément ces deux extrémités, de façon à étudier uniquement ce qui se passe dans la partie centrale.

II. — RAPPEL DES ANCIENNES MÉTHODES

Cette méthode du double signal a été pour la première fois utilisée par F. NEUMANN [29] de la façon suivante :

L'extrémité A_1 d'une barre de longueur $2l$ était portée pendant un temps donné à la température T_1 , tandis que l'autre extrémité A_2 était portée pendant le même temps à la température T_2 . Ensuite l'extrémité A_1 était portée à la température T_2 , l'extrémité A_2 à la température T_1 et ainsi de suite. On obtenait ainsi une double loi de température crénelée. Ce calcul de la répartition des températures est assez complexe ; on trouve que la température du milieu est constante et a pour valeur :

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2ch \frac{m_0 l}{\lambda}} \quad \text{avec} \quad m_0^2 = \frac{hp}{\lambda s}.$$

Un second moyen d'obtenir une autre relation entre λ et h consistait à prendre la différence de température entre deux points (ceux d'abscisse $\frac{l}{3}$ et $\frac{4l}{3}$ conviennent particulièrement car les calculs se simplifient alors considérablement).

En fait, il est déjà fort difficile d'imposer un signal, *a fortiori* deux signaux crénelés comme c'est le cas ici, aussi cette méthode serait-elle tombée dans l'oubli si l'on n'avait pu appliquer la méthode du signal périodique qui apporte, là aussi, de considérables simplifications expérimentales.

III. — ÉTUDE THÉORIQUE

1. — Cas de l'éprouvette unique.

La théorie développée par M. VERNOTTE [30] est quelque peu plus compliquée que dans le cas de la barre indéfinie, quoique le principe en soit le même.

Nous désignerons par $2l$ la longueur de la barre, l'origine des abscisses étant prise en son milieu, les autres notations restant inchangées.

Compte tenu des nouvelles conditions aux limites, l'origine des températures étant toujours la température ambiante, nous chercherons pour l'équation thermocinetique (1) une solution qui sera la somme des combinaisons des solutions périodiques de période τ et de la forme $T = e^{\pm \frac{2\pi i n t}{\tau} + \beta_n x}$ ce qui, par identification et en posant $\beta_n = m_n + i\mu_n$, conduit dans le cas $n = 1$, aux relations suivantes identiques aux relations (4) :

$$m_1^2 - \mu_1^2 = \frac{hp}{\lambda s}, \quad m_1 \mu_1 = \frac{\pi c \rho}{\lambda \tau}$$

et à des relations analogues dans les cas $n = 2, 3$, etc.

On doit donc envisager les combinaisons $+m + \mu, -m - \mu, -m + \mu, m - \mu$. La solution réelle se mettra donc dans le cas $n = 1$, cas que nous envisagerons uniquement désormais en supprimant l'indice 1, sous la forme d'une somme de quatre fonctions :

$$T = A_1 e^{mx} e^{i\left(2\pi \frac{t}{\tau} + \mu x\right)} + A_2 e^{-mx} e^{i\left(2\pi \frac{t}{\tau} - \mu x\right)} + A_3 e^{mx} e^{-i\left(2\pi \frac{t}{\tau} + \mu x\right)} + A_4 e^{-mx} e^{-i\left(2\pi \frac{t}{\tau} - \mu x\right)}$$

$$\text{ou : } T = e^{mx} \left[(A_1 + A_3) \cos \left(2\pi \frac{t}{\tau} + \mu x \right) + (A_1 - A_3) i \sin \left(2\pi \frac{t}{\tau} + \mu x \right) \right] \\ + e^{-mx} \left[(A_2 + A_4) \cos \left(2\pi \frac{t}{\tau} - \mu x \right) + (A_2 - A_4) i \sin \left(2\pi \frac{t}{\tau} - \mu x \right) \right].$$

La solution sera réelle si A_1 et A_3 , A_2 et A_4 sont imaginaires conjugués.

Posons alors :

$$A_1 + A_3 = A, \quad A_1 - A_3 = -iA', \\ A_2 + A_4 = B, \quad A_2 - A_4 = -iB'.$$

Il vient :

$$T = \left[A \cos \left(2\pi \frac{t}{\tau} + \mu x \right) + A' \sin \left(2\pi \frac{t}{\tau} + \mu x \right) \right] e^{mx} \\ + \left[B \cos \left(2\pi \frac{t}{\tau} - \mu x \right) + B' \sin \left(2\pi \frac{t}{\tau} - \mu x \right) \right] e^{-mx}$$

et, en introduisant les fonctions trigonométriques hyperboliques :

$$T = [(A' + B') \cos \mu x \operatorname{ch} mx - (A + B) \sin \mu x \operatorname{sh} mx \\ + (A' - B') \cos \mu x \operatorname{sh} mx + (B - A) \sin \mu x \operatorname{ch} \mu x] \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \\ + [(A' + B') \sin \mu x \operatorname{sh} mx + (A + B) \cos \mu x \operatorname{ch} mx \\ + (A - B) \cos \mu x \operatorname{sh} mx + (A' - B') \sin \mu x \operatorname{ch} mx] \cos 2\pi \frac{t}{\tau}.$$

Nous poserons, pour ne pas alourdir :

$$A' + B' = a, \quad A + B = -b, \quad A' - B' = c, \quad B - A = d,$$

de sorte que nous aurons :

$$\begin{aligned} T = & [a \cos \mu x \operatorname{ch} mx + b \sin \mu x \operatorname{sh} mx + c \cos \mu x \operatorname{sh} mx + d \sin \mu x \operatorname{ch} mx] \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \\ & + [a \sin \mu x \operatorname{ch} mx - b \cos \mu x \operatorname{ch} mx + c \sin \mu x \operatorname{ch} mx - d \cos \mu x \operatorname{sh} mx] \cos 2\pi \frac{t}{\tau}. \end{aligned} \quad (8)$$

Les signaux émis aux extrémités $x = \pm l$ étant connus ainsi que leurs fondamentaux, nous pourrions écrire pour $x = l$ et $x = -l$, en désignant par u_l, v_l, u_{-l}, v_{-l} les coefficients des fondamentaux.

$$\begin{aligned} u_l &= a \cos \mu l \operatorname{ch} ml + b \sin \mu l \operatorname{sh} ml + c \cos \mu l \operatorname{sh} ml + d \sin \mu l \operatorname{ch} ml, \\ v_l &= a \sin \mu l \operatorname{ch} ml - b \cos \mu l \operatorname{ch} ml + c \sin \mu l \operatorname{ch} ml - d \cos \mu l \operatorname{sh} ml. \end{aligned}$$

Deux expressions analogues sont obtenues en changeant l en $-l$. Nous avons aussi quatre équations à quatre inconnues a, b, c, d ; la résolution en est aisée car de grandes simplifications apparaissent par addition et par soustraction.

Ceci étant, l'expression $\frac{1}{2}(T_l + T_{-l})$ étant fort simple, nous la prendrons pour loi du signal émis (SE); nous aurons donc :

$$\begin{aligned} (\text{SE}) : & (a \cos \mu l \operatorname{ch} ml + b \sin \mu l \operatorname{sh} ml) \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \\ & + (a \sin \mu l \operatorname{sh} ml - b \cos \mu l \operatorname{ch} ml) \cos 2\pi \frac{t}{\tau}, \end{aligned} \quad (9)$$

le signal reçu (SR) au centre de la barre étant :

$$(\text{SR}) : a \sin 2\pi \frac{t}{\tau} - b \cos 2\pi \frac{t}{\tau}.$$

C'est de la comparaison de ces signaux que, là encore, nous déduirons les constantes

$$\frac{\lambda}{c\rho} \quad \text{et} \quad \frac{hp}{\lambda s}.$$

Pour cela, posons :

$$\begin{aligned} a &= \alpha \cos \varphi, & a \cos \mu l \operatorname{ch} ml + b \sin \mu l \operatorname{sh} ml &= \beta \cos \theta, \\ b &= \alpha \sin \varphi, & -a \sin \mu l \operatorname{sh} ml + b \cos \mu l \operatorname{ch} ml &= \beta \sin \theta, \end{aligned}$$

nous aurons alors :

$$T_0 = \alpha \sin \left(2\pi \frac{t}{\tau} - \varphi \right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(T_l + T_{-l}) = \beta \sin \left(2\pi \frac{t}{\tau} - \theta \right);$$

on introduit ainsi, et d'une façon symétrique, les angles de déphasage.

Nous aurons aussi :

$$\begin{aligned}\beta \cos \theta &= \alpha (\cos \mu l \operatorname{ch} ml \cos \varphi + \sin \mu l \operatorname{sh} ml \sin \varphi), \\ \beta \sin \theta &= \alpha (-\sin \mu l \operatorname{sh} ml \cos \varphi + \cos \mu l \operatorname{ch} ml \sin \varphi).\end{aligned}$$

Posons : $\frac{\beta}{\alpha} = M, \quad \cos \mu l \operatorname{ch} ml = x, \quad \sin \mu l \operatorname{sh} ml = y.$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}x \cos \varphi + y \sin \varphi &= M \cos \theta \\ x \sin \varphi - y \cos \varphi &= M \sin \theta\end{aligned} \quad \text{d'où} \quad \begin{aligned}x &= M \cos (\theta - \varphi) \\ y &= M \sin (\varphi - \theta)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}x^2 &= \cos^2 \mu l \operatorname{ch}^2 ml = \frac{(1 + \cos 2 \mu l) (\operatorname{ch} 2ml + 1)}{4}, \\ y^2 &= \sin^2 \mu l \operatorname{sh}^2 ml = \frac{(1 - \cos 2 \mu l) (\operatorname{ch} 2ml - 1)}{4}.\end{aligned}$$

Posons : $\cos 2 \mu l = X, \quad \operatorname{ch} 2ml = Y,$

il vient :

$$\begin{aligned}(1 + X)(1 + Y) &= 4x^2 \\ (1 - X)(Y - 1) &= 4y^2\end{aligned} \quad \text{d'où} \quad \begin{aligned}X + Y &= 2(x^2 + y^2) = 2M^2 \\ XY &= 2(x^2 - y^2) - 1 = 2M^2 \cos 2(\theta - \varphi) - 1\end{aligned}$$

X et Y sont racines de l'équation :

$$Z^2 - 2M^2Z + 2M^2 \cos 2(\theta - \varphi) - 1 = 0$$

et par suite nous aurons sans ambiguïté possible :

$$\begin{aligned}X &= \cos 2 \mu l = M^2 - \sqrt{M^4 - 2M^2 \cos 2(\theta - \varphi) + 1}, \\ Y &= \operatorname{ch} 2ml = M^2 + \sqrt{M^4 - 2M^2 \cos 2(\theta - \varphi) + 1}.\end{aligned}$$

Si m est déterminé d'une façon univoque, il n'en est pas de même pour μ , par suite de l'indétermination provenant de l'inversion du cosinus. Or, les températures oscillent précisément autour d'une température stationnaire; les développements en série de FOURIER de T_0 et de $\frac{1}{2}(T_l + T_{-l})$ mettent en évidence deux termes constants dans le temps :

$$\bar{T}_0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(\bar{T}_l + \bar{T}_{-l})$$

qui sont précisément les échauffements moyens ou stationnaires.

L'équation thermocinétique en régime stationnaire est alors :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{hp}{\lambda s} \bar{T}. \quad (10)$$

Dans le cas de la barre limitée, la solution est de la forme :

$$\bar{T} = A \operatorname{ch} m_0 x \quad \text{avec} \quad m_0^2 = \frac{hp}{\lambda s};$$

par suite :

$$\frac{\bar{T}_l + \bar{T}_{-l}}{2\bar{T}_0} = \operatorname{ch} m_0 l \quad \text{d'où} \quad m_0.$$

Ici encore, l'indétermination est levée du fait que :

$$m^2 - \mu^2 = m_0^2 = \frac{hp}{\lambda s}.$$

Les avantages de cette nouvelle méthode sont multiples; en plus de celui déjà indiqué relatif à la longueur des éprouvettes, on peut, grâce à l'artifice qui consiste à prendre pour signal émis la demi-somme des températures terminales, éliminer une dissymétrie certaine du fait des dissemblances géométriques des chauffoirs, ainsi que du positionnement des extrémités par rapport à ces mêmes chauffoirs.

2. — Cas de deux demi-éprouvettes juxtaposées.

On peut d'ailleurs exploiter plus à fond cet avantage; en effet, si l'on dispose bout à bout deux barres identiques chauffées à chacune de leurs extrémités, le gradient de température est nul au contact; la résistance thermique de contact n'entraîne donc théoriquement aucune discontinuité de température et les deux portions de barre se comportent comme une barre unique deux fois plus longue.

Mais comme on ne peut, nous l'avons vu, supposer la symétrie parfaite, la jonction est toujours traversée par un flux de chaleur avec tous les inconvénients que cela entraîne. Toutefois, la dissymétrie étant certainement là encore petite, on peut encore utiliser ici l'artifice de la mesure des températures moyennes [31].

L'origine des coordonnées étant toujours au milieu, c'est-à-dire à la jonction des deux parties de la barre, nous prendrons comme sens positif celui allant de la jonction vers la droite.

L'équation de la répartition des températures dans les deux portions est celle déjà écrite (8).

Pour la demi-barre de droite, on peut écrire :

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_0 = -\lambda (cm + d\mu) \sin 2\pi \frac{t}{\tau} - \lambda (c\mu - dm) \cos 2\pi \frac{t}{\tau}.$$

Pour la demi-barre de gauche, on peut écrire (en désignant par a' b' c' d' les nouvelles constantes) :

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_0 = -\lambda (cm' + d'\mu) \sin 2\pi \frac{t}{\tau} - \lambda (c'\mu - d'm) \cos 2\pi \frac{t}{\tau}.$$

Comme il y a conservation de flux au passage, nous aurons :

$$\begin{aligned} cm + d\mu &= c'm + d'\mu, \\ c\mu - dm &= c'\mu - d'm, \end{aligned}$$

ce qui implique : $c = d', \quad d = d',$

la résistance de contact n'intervient donc pas.

Du fait de la double égalité précédente, le calcul de la quantité $\frac{1}{2} (T_l + T_{-l})$ fait apparaître une nouvelle simplification; nous avons en effet :

$$\frac{1}{2} (T_l + T_{-l}) = \left[\frac{a + a'}{2} \cos \mu l \operatorname{ch} ml + \frac{b + b'}{2} \sin \mu l \operatorname{sh} ml \right] \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \\ + \left[\frac{a + a'}{2} \sin \mu l \operatorname{sh} ml - \frac{b + b'}{2} \cos \mu l \operatorname{ch} ml \right] \cos 2\pi \frac{t}{\tau}$$

avec :

$$T_0 = \frac{a + a'}{2} \sin 2\pi \frac{t}{\tau} - \frac{b + b'}{2} \cos 2\pi \frac{t}{\tau}$$

on obtient ainsi un système analogue à celui déjà connu.

Comme il est matériellement impossible de mesurer la température dans la section $x = 0$, on mesure les températures à des distances $+\varepsilon$ et $-\varepsilon$ de part et d'autre de la jonction; la moyenne $\frac{1}{2} (T_\varepsilon + T_{-\varepsilon})$ est naturellement identique à la température T_0 , les longueurs étant toujours comptées à partir de la jonction.

En pratique, on ne peut bien entendu, pour des raisons mécaniques évidentes, juxtaposer deux demi-éprouvettes; il est préférable de les rendre solidaires l'une de l'autre. La meilleure solution semble pour cela être obtenue au moyen d'un goujon dont les deux extrémités sont encastrées à force dans des parties femelles correspondantes des deux demi-éprouvettes. Bien entendu, la zone perturbée doit être aussi réduite que possible (4 à 5 mm par exemple).

On peut se demander quel est l'ordre de grandeur de la perturbation possible de température.

Revenons pour cela à l'expression (9).

$$\text{Posons :} \quad U(x) = \frac{1}{2} (T_x + T_{-x})$$

et cherchons comment se comporte $U(x)$ au voisinage de $x = 0$; on a évidemment :

$$U(0) = a \sin 2\pi \frac{t}{\tau} - b \cos 2\pi \frac{t}{\tau}, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_0 = 0, \\ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0 = (am_0^2 + 2bm_\mu) \sin 2\pi \frac{t}{\tau} + (2am_\mu - bm_0^2) \cos 2\pi \frac{t}{\tau}.$$

Nous allons voir sur une application numérique que le module de cette expression reste très petit; au voisinage de $x = 0$, la fonction U reste donc constante sur un assez grand intervalle; le contact entre les deux demi-éprouvettes peut être quelconque sur tout cet intervalle, ce qui justifie l'encastrement. Dans l'expérience ci-après, nous avons au voisinage du centre :

$$a = -0,29163, \quad b = -0,18455, \quad m_0^2 = 0,0090, \quad m_\mu = 0,01825.$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 = -0,00937 \sin 2\pi \frac{t}{\tau} - 0,00898 \cos 2\pi \frac{t}{\tau}$$

$$< 0,013 \text{ mV soit } 3,3^\circ \text{ C.}$$

Par suite, pour $x = \varepsilon$ on aura :

$$U(\varepsilon) \neq U(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$\begin{array}{ll} \text{avec : } \varepsilon = 4 \text{ mm,} & U(\varepsilon) - U(0) \leq 0,26^\circ \\ \text{» } \varepsilon = 3 \text{ mm,} & U(\varepsilon) - U(0) \leq 0,15^\circ. \end{array}$$

Si donc le procédé de fixation nécessite 3 mm de part et d'autre de la face de jonction des deux demi-épreuves, l'erreur qui en résulte est minime.

IV. — DISPOSITIFS EXPÉRIMENTAUX

1. — L'éprouvette.

Là encore, on a intérêt à ce que la longueur de l'éprouvette soit aussi grande que possible. Les dimensions optimales, compte tenu naturellement des possibilités de réalisation, semblent être 130 à 170 mm pour la longueur et 10 mm environ pour le diamètre.

2. — Les prises de température.

Les trois couples sont placés, comme dans le cas de la barre indéfinie, dans de petites cannes d'alumine de 2 mm de diamètre disposées dans trois trous borgnes. Les couples terminaux sont identiques et sont groupés soit en série, soit en parallèle. L'enregistrement des températures s'effectue au potentiomètre électronique.

3. — Les supports.

Comme il est nécessaire que les échanges thermiques avec l'enceinte puissent s'effectuer librement sur la périphérie, on ne peut disposer l'éprouvette sur un support qui perturberait ceux-ci. La meilleure disposition semble être celle qui consiste à adapter les extrémités dans deux mors fendus, sur l'axe desquels sont fixées deux bagues métalliques servant de support. Un tel dispositif accélère considérablement le refroidissement des extrémités, de sorte que, durant une partie du cycle thermique, les extrémités de l'éprouvette peuvent être plus froides que la partie centrale, mais cela n'a pas d'importance.

4. — Les chauffoirs.

La première solution, la plus simple, consiste à bobiner quelques spires de fil résistant sur les deux extrémités de l'éprouvette. Or, à l'usage, cette solution s'est

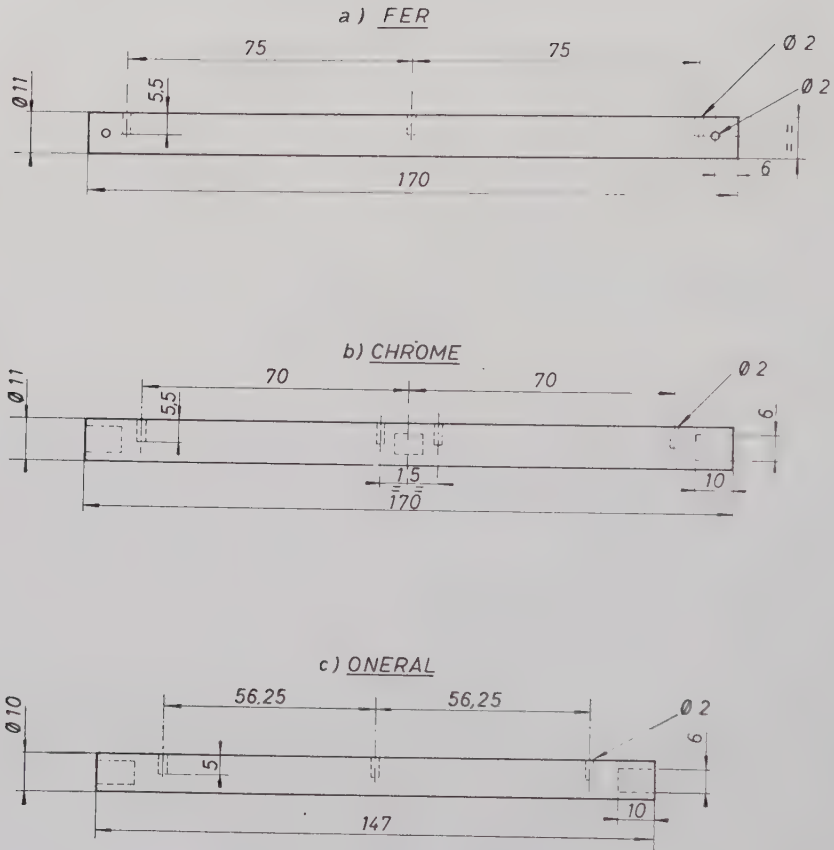


Fig. 10. — Types d'éprouvettes utilisées.

révélée mauvaise pour la raison suivante que l'énergie dissipée dans les chauffoirs sert pour une part à créer le signal thermique et pour une autre part souvent plus importante, à perturber la température ambiante au voisinage des extrémités, voire même à élever la température de l'enceinte si celle-ci n'est pas suffisamment vaste. Aussi, avons-nous adopté la solution suivante, qui consiste à percer aux extrémités de l'éprouvette deux trous de 2 mm environ dans lesquels on dispose une petite canne isolante entourant un fil résistant RNC 3. Le courant est amené au moyen de fils de cuivre, le contact Cu-RNC étant assuré par une simple ligature. De cette façon, la plus grande partie de l'énergie sert à créer le signal.

Nous avons représenté (*fig. 10*) trois types d'éprouvettes ayant servi à nos expériences. Le premier de ces types correspond au cas présentement étudié.

V. — EXPÉRIENCE

L'éprouvette, taillée dans la même matière que précédemment, avait 11 mm de diamètre et 170 mm de longueur, la distance entre couples extrêmes étant de 150 mm (*fig. 10 a*). La température ambiante était de 0,87 mV (21°), la période de 915 s (voir *fig. 11*, courbes III).

Les fondamentaux des signaux ont pour expression :

$$(SE) = \frac{1}{2} (T_l + T_{-l}) : 2,2904 - 0,1219 \cos 2\pi \frac{t}{\tau} - 0,5201 \sin 2\pi \frac{t}{\tau},$$

$$(SR) = T_0 : 2,0001 + 0,18455 \cos 2\pi \frac{t}{\tau} - 0,29163 \sin 2\pi \frac{t}{\tau},$$

c'est-à-dire :

$$(SE) : 2,2904 + 0,5342 \sin \left(2\pi \frac{t}{\tau} + 3,37182 \right),$$

$$(SR) : 2,0001 + 0,3451 \sin \left(2\pi \frac{t}{\tau} + 2,57734 \right),$$

par suite :

$$\begin{aligned} M &= 1,5478, & \theta - \varphi &= 0,79448, \\ M^2 &= 2,39568, & \cos 2(\theta - \varphi) &= -0,018165, \\ M^4 &= 5,73931, \end{aligned}$$

et :

$$\cos 2\mu l = -0,21702, \quad \operatorname{ch} 2ml = 5,00838,$$

d'où

$$\begin{aligned} 2ml &= 2,2941, & 2\mu l &= 1,78954, \\ m &= 0,1525, & \mu &= 0,1193, \end{aligned}$$

et :

$$\frac{\lambda}{\epsilon \rho} = \frac{\pi}{m \mu \tau} = 0,189.$$

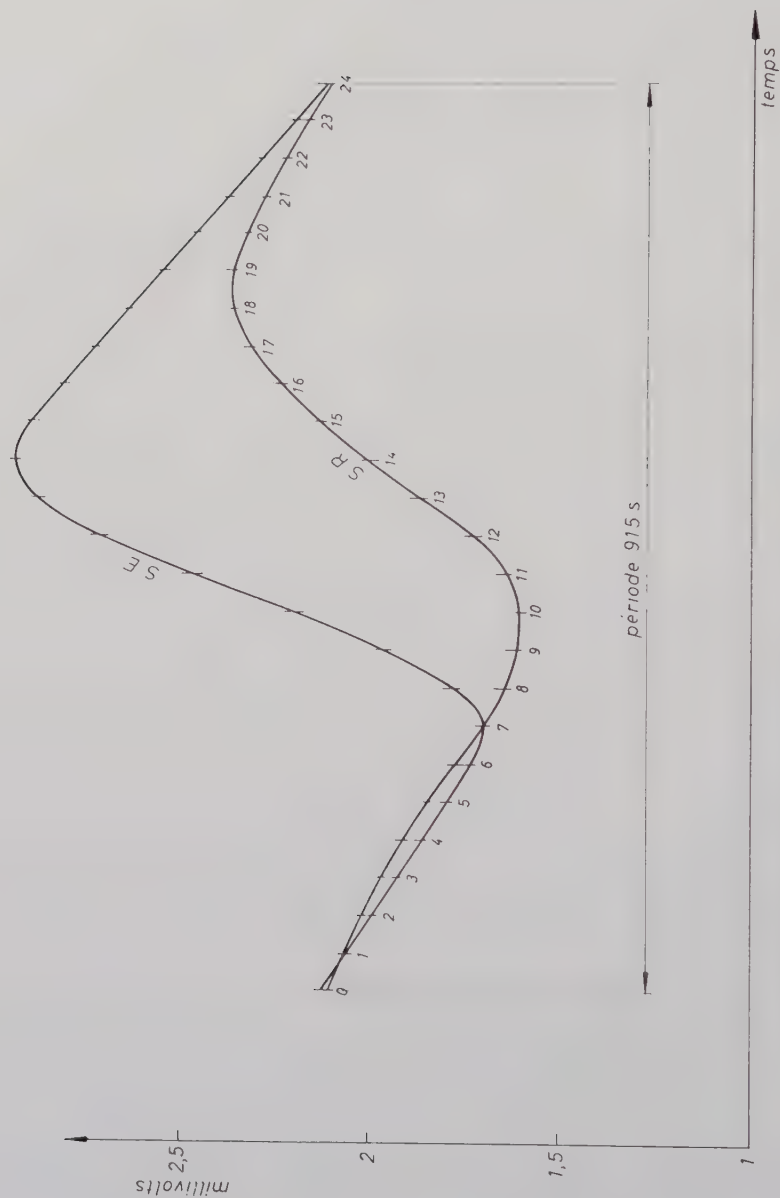


Fig. 11. — Courbes III. — Signaux thermiques périodiques dans une éprouvette de fer
Température ambiante 0,87 mV — Couples BTi₃-NiTi.

VÉRIFICATION.

On a :

$$\text{ch } m_0 l = \frac{2,2904 - 0,87}{2,0001 - 0,87} = 1,2647,$$

$$m_0 = 0,095, \quad m_0^2 = 0,0090 \quad \text{et} \quad m^2 - \mu^2 = 0,0090.$$

La valeur (0,189) de la diffusivité que nous venons de trouver et qui correspond à la température de 2,145 mV soit 51° 6, est à rapprocher de la valeur (0,180) trouvée dans l'expérience précédente et pour la température de 50° 4. En remarquant, d'une part, que cette nouvelle valeur est entachée d'une erreur que nous allons chercher à évaluer par la suite, et, d'autre part, que la première valeur est exacte à $\pm 4 \%$ près, nous pouvons admettre qu'il y a recoupement des résultats.

VI. — PRÉCISION DE LA MÉTHODE

Peut-on apprécier l'erreur probable sur la valeur de la diffusivité déduite de cette mesure, en admettant, comme précédemment, que l'erreur est uniquement due au dépouillement et en faisant toujours relativement à la période le même raisonnement que précédemment?

Posons, pour répondre à cela :

$$\begin{aligned} a' &= a \cos \mu x \text{ ch } mx + b \sin \mu x \text{ sh } mx, & \alpha &= \cos \mu x \text{ ch } mx, & a' &= a\alpha + b\beta, \\ b' &= -a \sin \mu x \text{ sh } mx + b \cos \mu x \text{ ch } mx, & \beta &= \sin \mu x \text{ sh } mx, & b' &= b\alpha - a\beta. \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

On en déduit aussitôt, en désignant par :

η_1 et η_2 les erreurs absolues probables affectant les coefficients a et b ,
 η'_1 et η'_2 les erreurs absolues probables affectant les coefficients a' et b' ,

(les valeurs absolues de ces erreurs sont égales; elles se déduisent comme précédemment de la précision des mesures)

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{(b\beta - a\alpha) \eta_1 - (a\beta + b\alpha) \eta_2 + a\eta'_1 + b\eta'_2}{a^2 + b^2}, \\ d\beta &= \frac{-(b\alpha + a\beta) \eta_1 + (a\alpha - b\beta) \eta_2 + b\eta'_1 - a\eta'_2}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} d\alpha &= x [\cos \mu x \text{ sh } mx dm - \text{ch } mx \sin \mu x d\mu], \\ d\beta &= x [\text{sh } mx \cos \mu x d\mu + \sin \mu x \text{ ch } mx dm]. \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} dm &= \frac{1}{x} \frac{\text{sh } mx \cos \mu x d\alpha + \text{ch } mx \sin \mu x d\beta}{\sin^2 \mu x + \text{sh}^2 mx}, \\ d\mu &= \frac{1}{x} \frac{-\text{ch } mx \sin \mu x d\alpha + \text{sh } mx \cos \mu x d\beta}{\sin^2 \mu x + \text{sh}^2 mx}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{\lambda}{c\rho}\right)}{\frac{\lambda}{c\rho}} &= \frac{dm}{m} + \frac{d\mu}{\mu} + \frac{d\tau}{\tau} \\ &= \frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{x(\sin^2 \mu x + \operatorname{sh}^2 mx)} \left[\left(\frac{\operatorname{sh} mx \cos \mu x}{m} - \frac{\operatorname{ch} mx \sin \mu x}{\mu} \right) d\alpha \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\operatorname{ch} mx \sin \mu x}{m} + \frac{\operatorname{sh} mx \cos \mu x}{\mu} \right) d\beta \right] \end{aligned}$$

et comme $|\eta_1| = |\eta_2| = |\eta'_1| = |\eta'_2|$, l'erreur relative probable est finalement donnée par :

$$\sqrt{\left(\frac{d\tau}{\tau}\right)^2 + \frac{2\eta^2}{x^2(a^2 + b^2)(\operatorname{ch} 2ml - \cos 2\mu l)} \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{\mu^2}\right)(\alpha^2 + \beta^2 + 1)}$$

Application.

Ce calcul, appliqué à l'expérience précédente montre que, dans ce cas, l'erreur commise sur l'évaluation de la période est de beaucoup la plus importante. Si l'on admet que τ est connu à 1 % près, il en sera sensiblement de même pour $\frac{\lambda}{c\rho}$.

Remarquons également que cette erreur augmente considérablement dès que l'amplitude du signal reçu diminue; elle augmenterait également si l'erreur probable η , que l'on déduit de l'erreur ε sur les ordonnées était plus importante.

Néanmoins, dans la majorité des cas, la précision est meilleure que dans le cas de la barre semi-infinie.

Si l'on admet que l'erreur expérimentale est du même ordre de grandeur (1 %), l'erreur totale serait de l'ordre de 2 %, valeur très acceptable.

LA MESURE DE LA DIFFUSIVITÉ THERMIQUE A DIFFÉRENTES TEMPÉRATURES

I. — PRINCIPE

Il suffit, tout au moins à première vue, de placer l'ensemble précédent (éprouvette et supports) dans un four, de porter ce dernier à la température voulue, et de recommencer l'expérience précédente.

II. — CORRECTION NÉCESSAIRE

Or, il se peut que, du fait de l'amplitude des signaux thermiques, la température θ de l'enceinte ne soit plus constante. Dans ce cas, le phénomène est régi par l'équation :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{c \rho}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{hp}{\lambda s} (T - \theta) \quad [32], \quad (11)$$

équation dans laquelle la température θ , que nous appellerons signal correspondant (SC), est une fonction de x et de t ; nous admettrons que sa période est la même que celle du phénomène thermique, c'est-à-dire que nous aurons, en prenant arbitrairement l'origine des températures :

$$\begin{aligned} T &= T_0 e^{-m_0 l} + T e^{-ml} \sin \left(2\pi \frac{t}{\tau} - \mu l \right), \\ \theta &= \Theta e^{-ml} \sin \left(2\pi \frac{t}{\tau} - \mu l - \psi \right), \end{aligned}$$

on en tire aussitôt :

$$\begin{aligned} m_0^2 &= \frac{hp}{\lambda s}, & m^2 - \mu^2 &= \frac{hp}{\lambda s} \left(1 - \frac{\Theta}{T} \cos \psi \right), \\ m\mu &= \frac{\pi c \rho}{\lambda \tau} + \frac{\Theta}{2T} \frac{hp}{\lambda s} \sin \psi. \end{aligned}$$

Est-il possible, comme dans le cas précédent où la température de l'enceinte était constante, de trouver une vérification?

La température de l'enceinte étant variable, nous ne pourrons plus la prendre comme origine des températures.

L'équation thermocinétique s'écrit en régime stationnaire :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{hp}{\lambda s} (\bar{T} - \bar{\theta}). \quad (12)$$

Les solutions étant de la forme :

$$\bar{T} = A_0 \operatorname{ch} m'_0 x + K,$$

$$\bar{\theta} = B_0 \operatorname{ch} m'_0 x + K,$$

avec :

$$m_0'^2 = \frac{hp}{\lambda s} \left(1 - \frac{B_0}{A_0} \right),$$

par suite, nous avons :

— au centre de la barre :

$$\bar{T}_0 = A_0 + K, \quad \bar{\theta}_0 = B_0 + K,$$

— et aux extrémités :

$$\bar{T}_l = A_0 \operatorname{ch} m'_0 l + K, \quad \bar{\theta}_l = B_0 \operatorname{ch} m'_0 l + K.$$

Or, ainsi que nous le verrons, seuls $\bar{T}_0$, θ_0 , $\bar{T}_l$ sont déterminés par l'expérience; par suite nous avons trois équations à quatre inconnues A_0 , B_0 , m'_0 , K .

— Si l'on fait constamment $B_0 = 0$ (température de l'enceinte constante) on a évidemment :

$$m_0'^2 = \frac{hp}{\lambda s} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} m'_0 l = \frac{\bar{T}_l - K}{\bar{T}_0 - K}.$$

— Si, par contre, on prend K arbitrairement, on a :

$$\operatorname{ch} m'_0 l = \frac{\bar{T}_l - K}{\bar{T}_0 - K} \quad \text{avec} \quad m_0'^2 = \frac{hp}{\lambda s} \left(1 - \frac{B_0}{A_0} \right) = \frac{hp}{\lambda s} \left(1 - \frac{\bar{\theta}_0 - K}{\bar{T}_0 - K} \right).$$

c'est-à-dire :

$$m_0'^2 = \frac{m^2 - \mu^2}{1 - \frac{\Theta}{\bar{T}} \cos \psi} \left[1 - \frac{\bar{\theta}_0 - K}{\bar{T}_0 - K} \right].$$

La vérification est donc encore possible.

Remarque. — La correction due au signal correspondant est d'autant plus faible que ψ , θ et surtout $\frac{hp}{\lambda s}$, c'est-à-dire h , sont petits, ce qui se produit pour les faibles températures. Pour les hautes températures, cette correction peut, du fait de la valeur élevée de h , être fort importante.

III. — DISPOSITIFS EXPÉRIMENTAUX

Le montage précédent doit être un peu modifié; en effet, si l'on place l'ensemble dans la zone isotherme d'un four, on constate que :

— l'énergie dépensée dans les chauffoirs sert souvent, pour une faible part, à créer le signal et, pour une grande part, à perturber la température du four, surtout si les dimensions de ce dernier sont réduites;

— en outre, le contact cuivre-fil résistant est à chaud la source de mauvais contacts qui sont à éviter;

— enfin, du fait des masses métalliques terminales, il est souvent difficile de créer dans la barre un signal même de faible amplitude; de plus le refroidissement est toujours très, sinon trop rapide, les extrémités de l'éprouvette étant rapidement beaucoup plus froides que le centre.

Pour ces trois raisons, nous avons adopté le nouveau dispositif suivant.

1. — L'éprouvette et les chauffoirs.

L'éprouvette a les mêmes dimensions que précédemment; dans ses extrémités sont toutefois disposés deux trous borgnes, de diamètre aussi grand que possible et de 10 mm environ de profondeur. Dans ces trous, on place le chauffoir constitué par un fil de platine ou de palladium disposé dans des petites gaines isolantes d'alumine de 10 mm

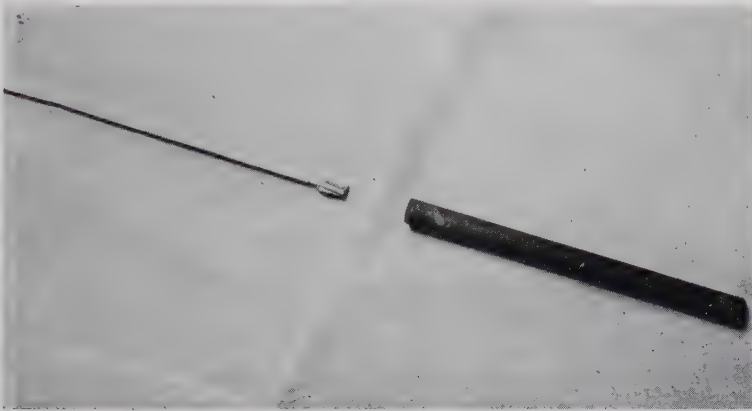


Fig. 12. — Chauffoir

environ et replié six à huit fois sur lui-même (*fig. 12*). L'isolement entre les extrémités repliées du fil et l'éprouvette est assuré par de la bourre d'amiante.

Les arrivées des fils du chauffoir sont, de plus, gainées et doublées sur toute leur longueur par des fils d'argent; de cette façon, la plus grande partie de l'énergie électrique sert à créer le signal et les ennuis inhérents aux contacts à chaud sont éliminés.

2. — Les supports.

Sur les deux bagues métalliques terminales on a creusé une gorge périphérique sur laquelle est bobinée un fil résistant RNC 3 qui permet de compenser les déperditions dues précisément à ces mêmes masses métalliques et également de limiter la vitesse de refroidissement. Dans ces bagues métalliques sont disposés deux et trois trous permettant le passage de tubes métalliques en acier inox servant de support aux gaines des couples thermo-électriques.

3. — Les mesures de température.

Elles s'effectuent comme précédemment au moyen de couples BTE-NTE dont la courbe d'étalonnage est sensiblement une fonction linéaire de la température (fig. 13, courbes IV); un couple supplémentaire est nécessaire pour la connaissance de la température du four (SC); il est toutefois nécessaire d'isoler électriquement les soudures des autres couples les unes des autres, ce que nous avons fait au moyen d'amiante ou de

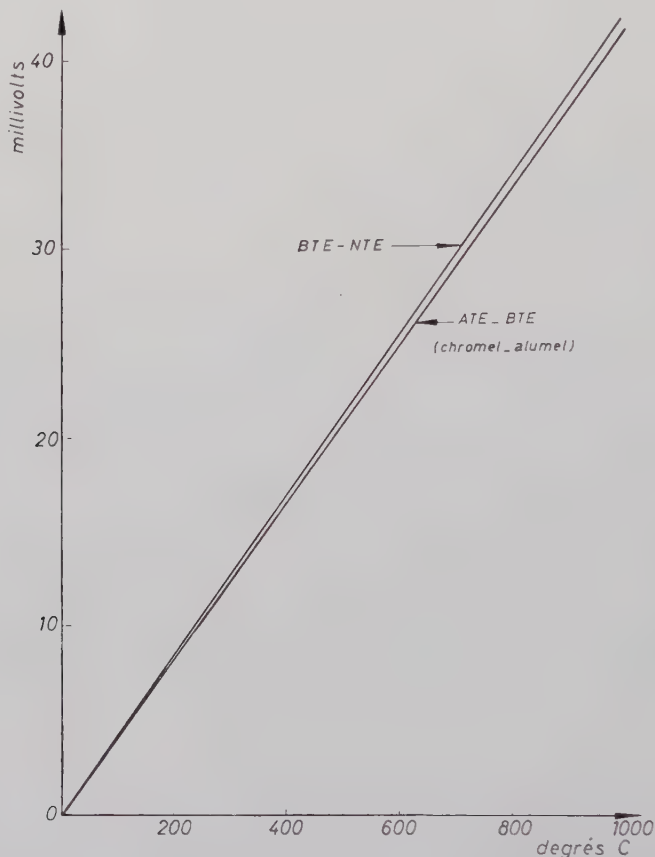


Fig. 13. — Courbes IV. — Étalonnage des couples BTE-NTE et ATE-BTE

laine de roche disposée au fond des trous dans lesquels sont placées les petites cannes isolantes. Cet isolement électrique est indispensable car, pour opérer au voisinage d'une température quelconque, il est nécessaire de monter un système d'opposition d'ailleurs absolument classique, mais qui nécessite une borne commune pour les couples.

De cette façon on peut toujours opérer sur la plus grande sensibilité du potentiomètre (5 mV pour toute l'échelle), ce qui peut permettre d'apprécier à l'estime 0,1°.

Le principal ennui est venu du fait que, opérant sur la grande sensibilité du potentiomètre pour des températures élevées, l'amplificateur de l'appareil est très sensible à l'induction due à l'enroulement chauffant.

Pour l'éliminer, nous avons :

— réalisé un four à deux enroulements en sens inverse, bobinés sur un tube d'alumine de 60 mm de diamètre intérieur;

— disposé un blindage intérieur (ce blindage étant constitué par un mince tube d'acier inox préalablement argenté au moyen de Leitsilber Degussa);

— métallisé également par argenture toutes les pièces métalliques du montage précédent, ceci pour éliminer par une mise à la terre l'induction qui ne manquerait pas d'être créée par les chauffoirs.

Malgré toutes ces modifications, l'ensemble reste fort simple (*fig. 14*) et, tel quel, nous avons effectué des mesures jusqu'à 900° C.



Fig. 14. — Ensemble du dispositif

Remarque. — Au fur et à mesure que l'on opère au voisinage de températures de plus en plus élevées, on constate que les signaux (SR) et (SC) sont d'abord sensiblement en phase, c'est-à-dire que l'on a $\psi \neq 0$, mais que, peu à peu, le déphasage se manifeste, s'accroît, et au voisinage de 500° C, ce sont (SE) et (SC) qui sont en phase.

Cela tient au fait que, pour les basses températures, le coefficient h est faible et l'énergie thermique se dissipe surtout dans la barre. Celle-ci élève ensuite la température de l'enceinte, laquelle est donc en phase avec celle de la barre. Lorsque le coefficient h est plus important, l'énergie thermique créant le signal émis se dissipe dès les extrémités de la barre dans l'enceinte, laquelle voit sa température perturbée du fait du signal émis.

C'est précisément pour des valeurs importantes de h que le mode de déplacement de la chaleur se rapproche d'une propagation proprement dite [33]. En effet les formules (4) montrent que si h est grand, m_1 l'est aussi; μ_1 par contre est petit; on peut donc en première approximation négliger μ_1^2 devant m_1^2 , il s'ensuit que la formule :

$$T = A_1^{-m_1 x} \sin \left(2\pi \frac{t}{\tau} - \mu_1 x \right)$$

donne pour la phase l'expression :

$$\frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{c\rho}{2} \sqrt{\frac{s}{h\lambda\rho}} x \right),$$

d'où l'on déduit la vitesse de phase :

$$\frac{2}{c\rho} \sqrt{\frac{h\bar{p}\lambda}{s}}$$

qui est indépendante de la période, c'est-à-dire de la fréquence du signal.

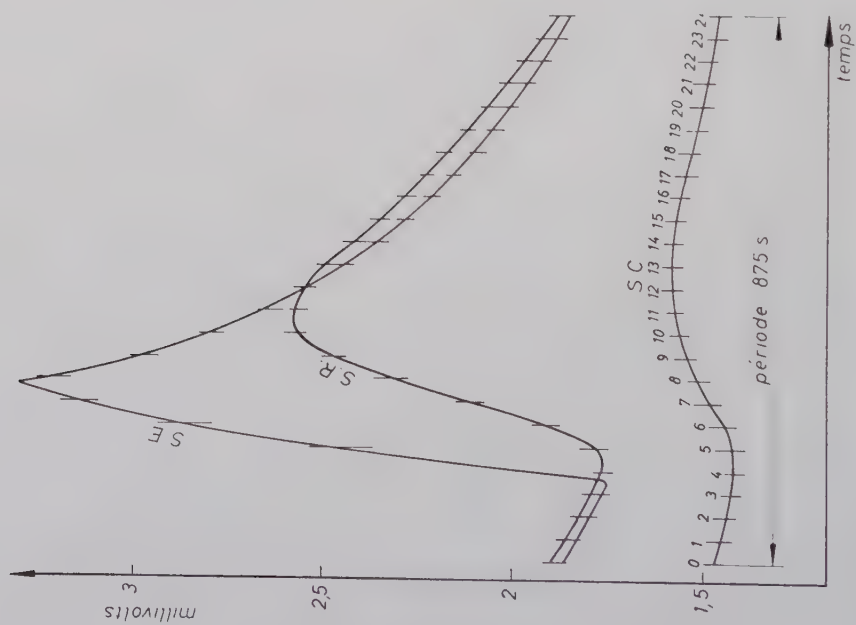


Fig. 15. — Courbes V. — Signaux thermiques périodiques dans une éprouvette de chrome fritté. — Couples BTE-NTE



Fig. 16. — Courbes VI. — Signaux thermiques périodiques dans une éprouvette de chrome fritté. Tension d'opposition 7 mV. — Couples BTE-NTE

En fait, on constate, au fur et à mesure que l'on opère à des températures de plus en plus élevées, l'existence d'un amortissement de plus en plus accentué, ce qui confirme la théorie (voir les résultats relatifs au chrome).

IV. — PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES : ÉTUDE DU CHROME FRITTÉ

La poudre de chrome ductile, préparée à l'O.N.E.R.A. par le procédé Galmiche est un matériau nouveau dont les applications semblent prometteuses [T].

Contrairement à la poudre de chrome ordinaire, on peut aisément la comprimer et la fritter. Dans le but d'étudier le produit obtenu après deux compressions et deux opérations de frittage (la densité finale étant de 6,2), nous avons fait réaliser deux demi-éprouvettes dont les dimensions sont indiquées sur la *figure 10 b* (11 mm de diamètre, 170 mm de longueur, 140 mm entre couples extrêmes). Ces demi-éprouvettes sont assemblées au moyen d'un goujon central.

Les chauffoirs sont disposés dans deux trous percés dans les extrémités terminales. L'ensemble du dispositif a déjà été décrit précédemment.

La réalisation des signaux périodiques, facile au voisinage des basses températures, est plus difficile au voisinage des températures élevées, l'identité des signaux étant difficile à maintenir pendant plusieurs périodes. Trois à quatre périodes sont toujours nécessaires avant de considérer le régime périodique comme établi.

Une série de dix expériences a été faite. Nous expliciterons dépouillements et vérifications pour deux d'entre elles, les plus caractéristiques : la première pour une basse température, la seconde pour une température élevée.

1. — A basse température.

Au voisinage de la température ambiante, nous avons les signaux suivants, dont la période commune est de 875 s (*fig. 15*, courbes V) :

$$(SE) : 2,3042 - 0,4377 \cos 2\pi \frac{t}{\tau} + 0,2785 \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$$

$$\text{ou : } 2,3042 + 0,5188 \sin \left(2\pi \frac{t}{\tau} + 5,27907 \right), \quad \text{d'où : } \theta = -5,27907;$$

$$(SR) : 2,1479 - 0,3426 \cos 2\pi \frac{t}{\tau} - 0,0892 \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$$

$$\text{ou : } 2,1479 + 0,3542 \sin \left(2\pi \frac{t}{\tau} + 4,45764 \right), \quad \text{d'où : } \varphi = -4,45765;$$

$$(SC) : 1,5096 - 0,0622 \cos 2\pi \frac{t}{\tau} - 0,0266 \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$$

$$\text{ou : } 1,5096 + 0,06765 \sin \left(2\pi \frac{t}{\tau} + 4,30826 \right), \quad \text{d'où : } \psi = 0,1493;$$

$$M = \frac{0,5188}{0,3542} = 1,46471, \quad \theta - \varphi = -0,82143,$$

$$M^2 = 2,145375, \quad \cos 2(\theta - \varphi) = 0,07185,$$

$$M^4 = 4,60262,$$

d'où : $\operatorname{ch} 2ml = 4,57657, \quad \cos 2\mu l = -0,2858,$

c'est-à-dire :

$$m = 0,1572, \quad \mu = 0,1329,$$

d'où : $\frac{\lambda}{c\rho} \text{ (valeur non corrigée)} = \frac{\pi}{m\mu\tau} = 0,172.$

La température moyenne correspondante est :

$$\frac{1}{2} (2,3042 + 2,1479) = 2,226 \text{ mV} \quad (53^{\circ} 7).$$

La valeur probable de $c\rho$ pour cette température est 0,688, d'où $\lambda = 0,118$.

Nous avons d'autre part :

$$\psi = 0,1493, \quad \cos \psi = 0,9889, \quad \sin \psi = 0,1489,$$

d'où :

$$\frac{hp}{\lambda s} = 0,00868, \quad \text{et} \quad \frac{\pi c\rho}{\lambda\tau} = 0,02076,$$

d'où : $\frac{\lambda}{c\rho} \text{ (valeur corrigée)} = 0,173,$

et : $\begin{cases} \lambda \text{ (corrigé)} = 0,119, \\ h \text{ (corrigé)} = 0,00028. \end{cases}$

VÉRIFICATION.

On a naturellement avec $K = 0$.

$$\operatorname{ch} m'_0 l = \frac{2,3042}{2,1479} = 1,0728,$$

$$m'_0 = 0,0542, \quad m'_0{}^2 = 0,00295,$$

et d'autre part : $m'_0{}^2 = 0,00260.$

Malgré les calculs plus compliqués, la vérification est encore possible.

2. — A haute température.

Afin de mieux mettre en évidence les possibilités de la méthode, nous allons développer les calculs correspondants à une autre expérience, effectuée à une température moyenne élevée (de l'ordre de 600° C) (*fig. 18*, courbes VIII).

Nous avons pour $\tau = 670$ s :

$$(SE) : 24,6852 - 0,26447 \cos 2\pi \frac{t}{\tau} - 0,03943 \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$$

ou : $24,6852 + 0,2674 \sin \left(2\pi \frac{t}{\tau} + 4,56438 \right), \quad \text{d'où : } \theta = -4,56438;$

$$(SR) : 24,2288 - 0,0556 \cos 2\pi \frac{t}{\tau} - 0,0915 \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$$

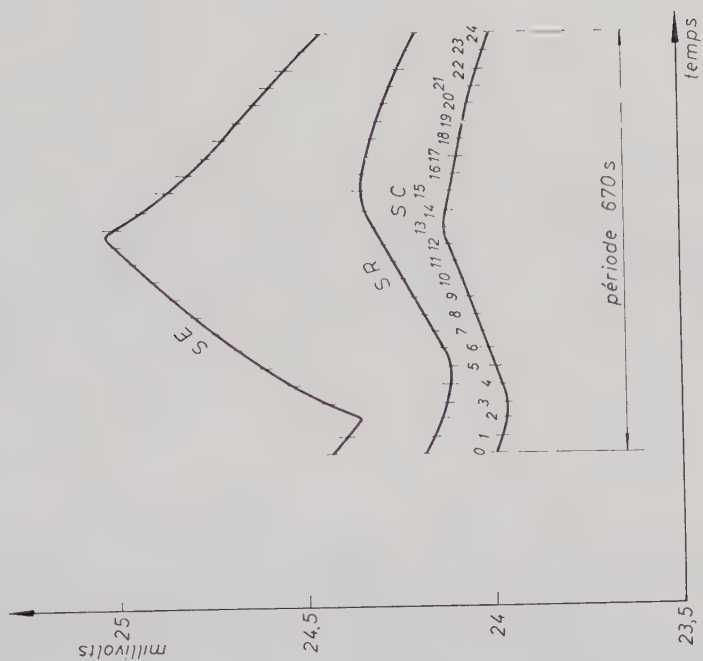


Fig. 18. — Courbes VIII. — Signaux thermiques périodiques dans une éprouvette de chrome fritté
Tension d'opposition 23 mV. — Couples BTE-NTE

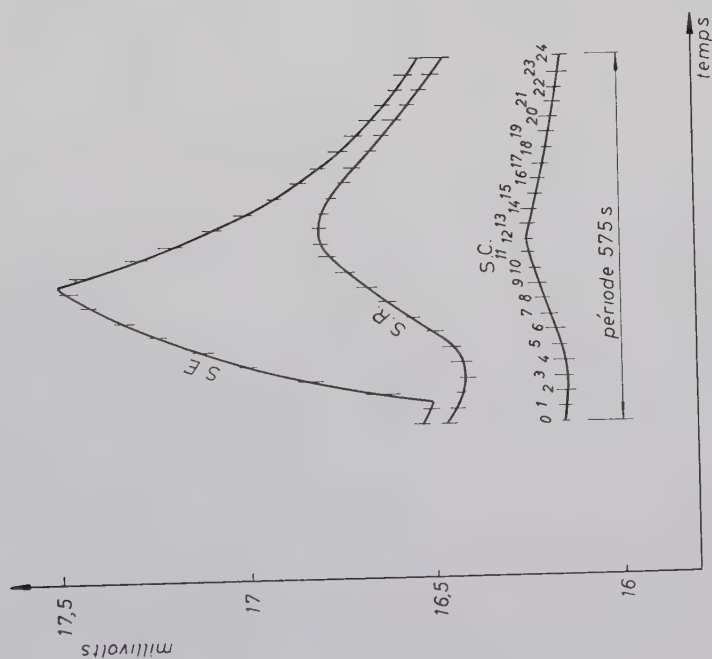


Fig. 17. — Courbes VII. — Signaux thermiques périodiques dans une éprouvette de chrome fritté
Tension d'opposition 15 mV. — Couples BTE-NTE

$$\text{ou : } 24,2288 + 0,10707 \sin \left(2\pi \frac{t}{\tau} + 3,6876 \right), \quad \text{d'où : } \varphi = -3,6876;$$

$$(\text{SC}) : 24,0442 - 0,0585 \cos 2\pi \frac{t}{\tau} - 0,0385 \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$$

$$24,0442 + 0,07004 \sin \left(2\pi \frac{t}{\tau} + 4,1303 \right), \quad \text{d'où : } \psi = -0,4427;$$

$$M = \frac{0,2674}{0,10707} = 2,49734, \quad \theta - \varphi = -0,87678,$$

$$M^2 = 6,23673, \quad \cos 2(\theta - \varphi) = -0,18186,$$

$$M^4 = 38,89681,$$

$$\text{d'où : } \quad \text{ch } 2ml = 12,7302, \quad \cos 2\mu l = -0,2568,$$

c'est-à-dire :

$$m = 0,2311, \quad \mu = 0,1311,$$

$$\text{d'où : } \quad \frac{\lambda}{c\rho} (\text{valeur non corrigée}) = 0,155.$$

La température moyenne correspondante est : 24,457 mV, soit 590° C:

La valeur probable de $c\rho$ pour cette température est 0,930, d'où $\lambda = 0,144$.

De plus, nous avons : $\psi = -0,4427$. Par suite $\frac{hp}{\lambda s} = 0,0885$ et $\frac{\pi c\rho}{\lambda \tau} = 0,04293$,

$$\text{et : } \quad \frac{\lambda}{c\rho} (\text{valeur corrigée}) = 0,109,$$

$$\text{d'où : } \quad \begin{cases} \lambda (\text{corrigé}) = 0,103. \\ h (\text{corrigé}) = 0,00240. \end{cases}$$

VÉRIFICATION.

Elle se fait comme précédemment avec $K = 0$; d'une part, $\text{ch } m'_0 l = 1,018$ d'où $m'_0{}^2 = 0,00074$ et, d'autre part, $m'_0{}^2 = 0,00088$.

La vérification est médiocre; cela tient à l'imprécision d'ailleurs inévitable avec laquelle sont connues les composantes continues des signaux.

3. — Résultats généraux.

Les résultats relatifs au chrome fritté sont consignés dans le tableau VII ci-après. Les courbes $\frac{\lambda}{c\rho}$ et $\lambda = f(T)$ (fig. 20, courbes X) ne sont pas monotones, la non-monotonie étant vraisemblablement due au caractère fritté du corps étudié. Néanmoins, la grande

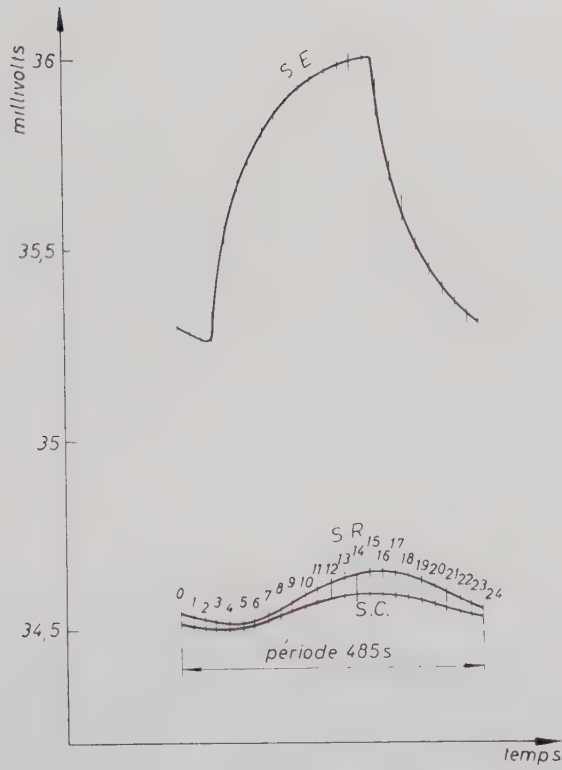


Fig. 19. — Courbes IX. — Signaux thermiques périodiques dans une éprouvette de chrome fritté. Tension d'opposition 33 mV. — Couples BTE-NTE

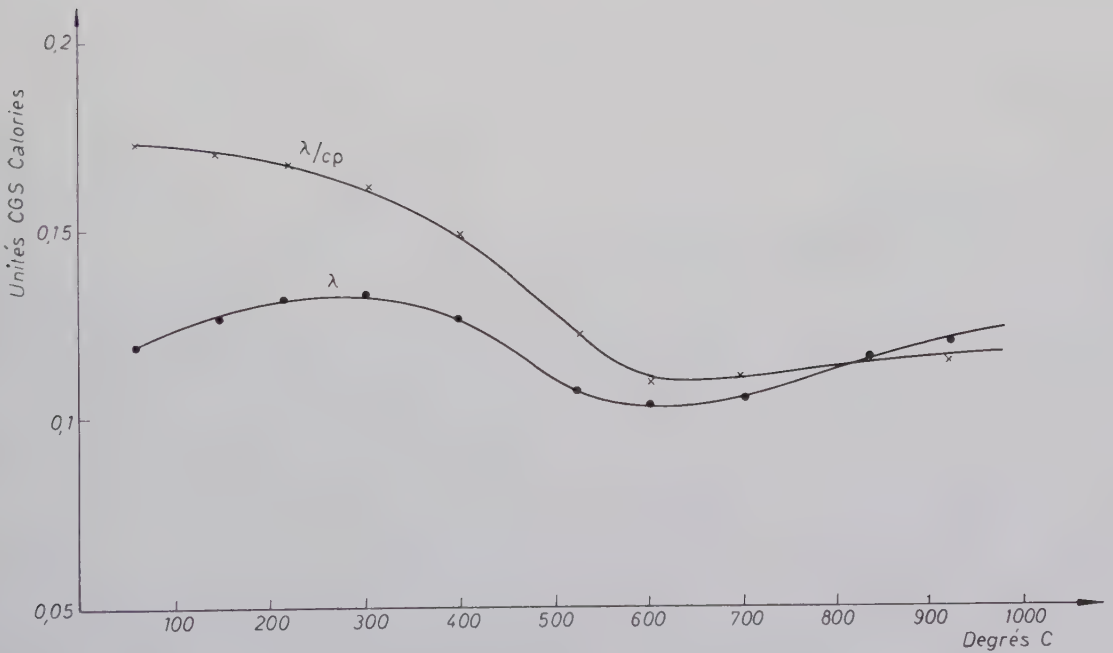


Fig. 20. — Courbes X. — Variations de la diffusivité et de la conductivité thermiques du chrome fritté en fonction de la température

TABLEAU VII

Température moyenne (°C)	$\frac{\lambda}{c \rho}$	λ	h
53,7	0,173	0,119	0,00028
120	0,171	0,126	0,00058
218	0,167	0,132	0,00092
303	0,162	0,134	0,00112
400	0,149	0,127	0,00135
527	0,121	0,106	0,00180
590	0,109	0,103	0,00240
692	0,111	0,105	0,00330
831	0,115	0,115	0,00560
918	0,115	0,119	0,00695

conductibilité thermique à haute température fait du chrome fritté un matériau vraiment nouveau. Notons que les tables donnent pour le chrome métal coulé [R] :

— à 204° C,	$\lambda = 0,2031,$	$\frac{\lambda}{c \rho} = 0,242,$
— à 426° C,	0,182	0,211
— à 649° C,	0,165	0,178
— à 870° C,	0,157	0,147

Nous avons d'autre part représenté (*fig. 21*, courbes X *bis*) la variation de h en fonction du cube de la température absolue T_K . On remarque, après l'oxydation superficielle qui se produit vers 500° C, la linéarité de la courbe, ce qui prouve que la valeur élevée de h est surtout due au rayonnement. Cette linéarité constitue la meilleure vérification des corrections un peu osées que nous avons dû effectuer à haute température.

La faible valeur initiale de h (0,00028) vient du fait que, initialement, le corps était superficiellement peu oxydé ($\varepsilon \neq 1$).

Remarque.

Pour les signaux V,	on a :	$m = 0,1572,$	$\mu = 0,1329.$
Pour les signaux VIII,	on a :	$m = 0,2311,$	$\mu = 0,1311.$
Pour les signaux IX,	on a :	$m = 0,3296,$	$\mu = 0,1380.$

Plus la température est élevée et plus l'amortissement augmente par rapport au déphasage. On se rapproche donc de la propagation proprement dite. *L'amortissement est tel que, n'étaient-ce les essais effectués à basse température, on pourrait désormais revenir à la barre semi-infinie avec une éprouvette de mêmes dimensions.*

On peut se demander pour quelle valeur de h et de la température on pourrait admettre qu'il n'y a plus déphasage.

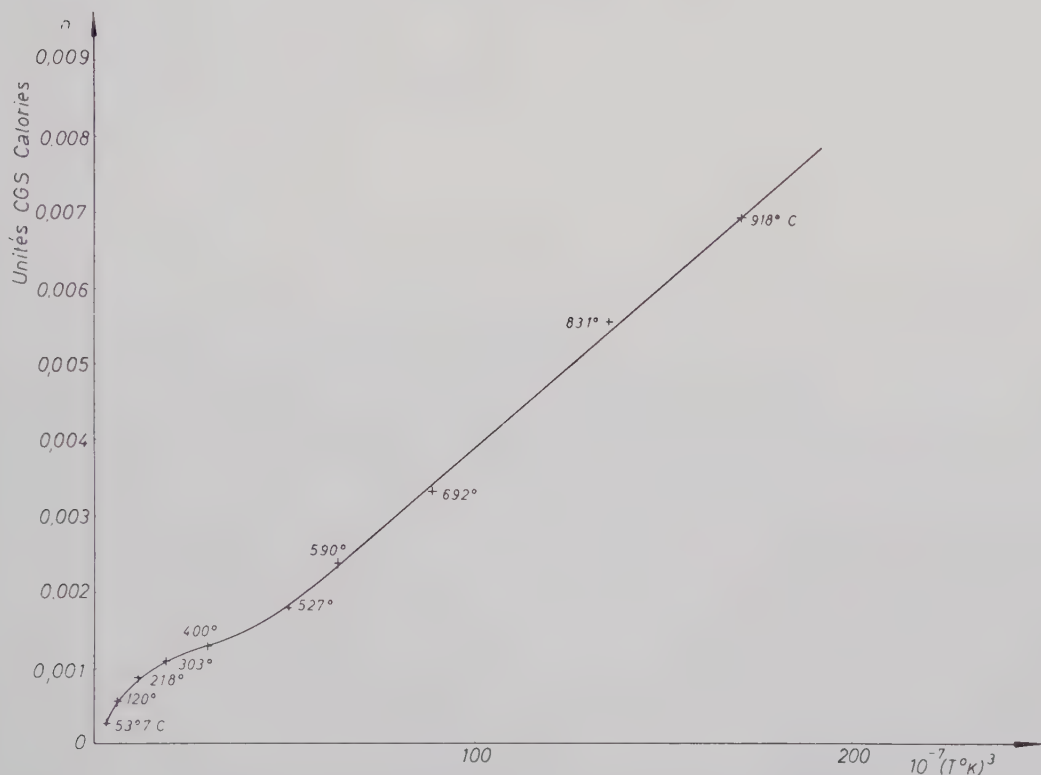


Fig. 21. — Courbe X bis. — Variation du coefficient d'échange superficiel en fonction du cube de la température absolue dans le cas du chrome fritté

Choisissons un amortissement de 100. — On aurait alors avec la même éprouvette ($\lambda \neq 0,11$) :

$$e^{-m_0 w} = 0,01,$$

c'est-à-dire : $m_0 = 0,659$, d'où : $h = 0,0131$.

La courbe X bis donne par extrapolation :

$$T \neq 1450^{\circ} \text{ C.}$$

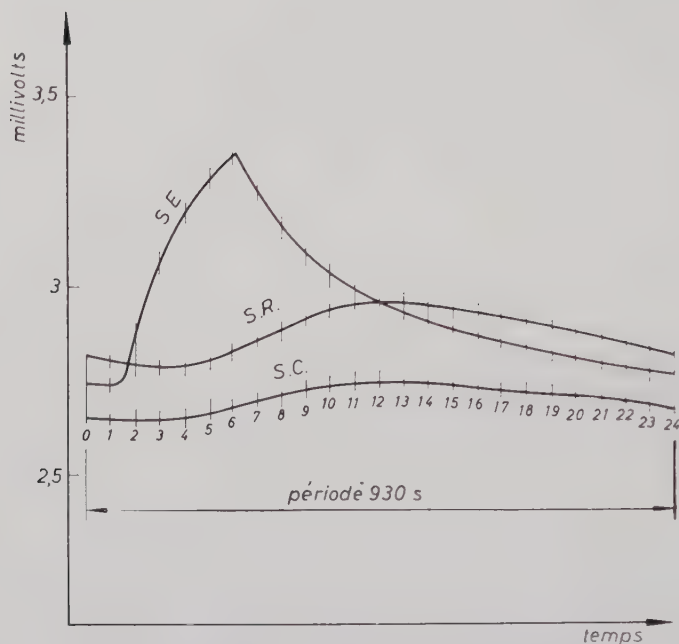


Fig. 22. — Courbes XI. — Signaux thermiques périodiques dans une éprouvette d'Onéral. — Couples BTE-NTE

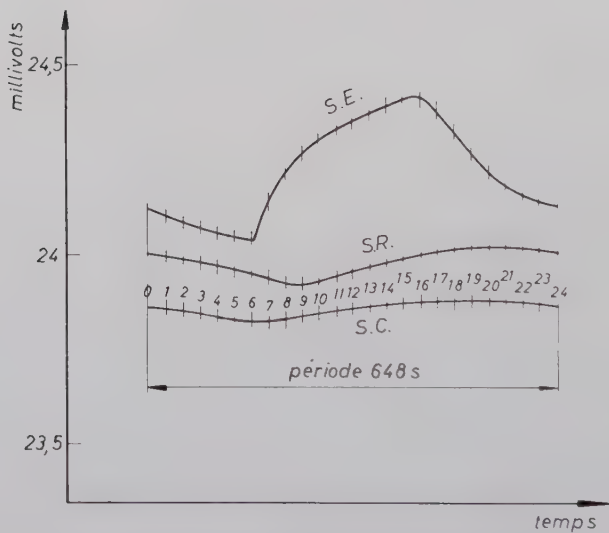


Fig. 23. — Courbes XII. — Signaux thermiques périodiques dans une éprouvette d'Onéral
Tension d'opposition 23 mV. — Couples BTE-NTE

V. — SECONDE SÉRIE D'EXPÉRIENCES : ÉTUDE DE L'ONÉRAL

Parallèlement à l'étude relative au chrome fritté, nous avons effectué sur l'Onéral, alliage réfractaire à base de cobalt-chrome-nickel, élaboré par les soins de M. BIBRING [U], une autre série de mesures de diffusivité thermique.

Les dimensions de l'éprouvette étaient quelque peu différentes : longueur 147 mm, diamètre 10 mm, distance entre couples extrêmes 112,5 mm (*fig. 10 c*).

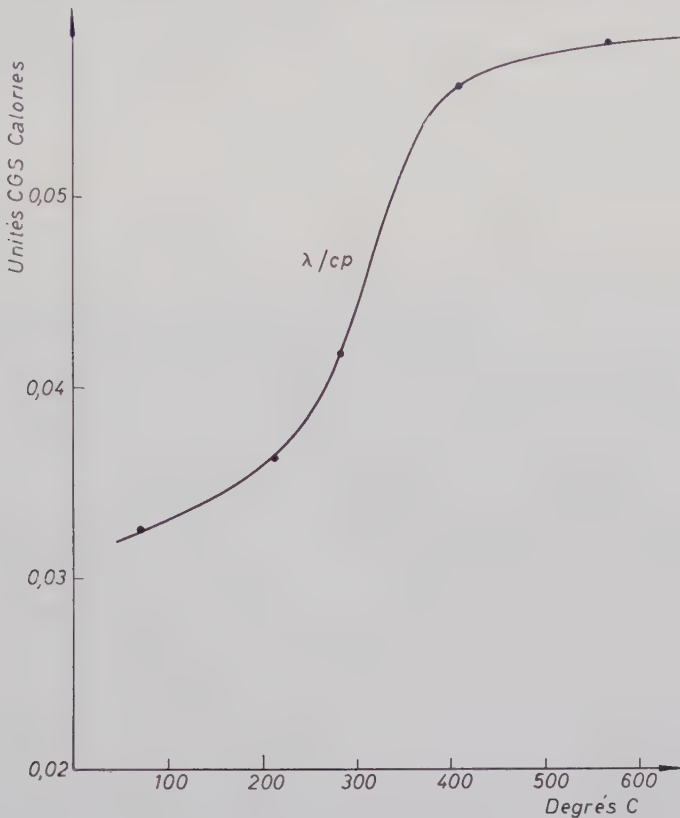


Fig. 24. — Courbes XIII. — Variation de la diffusivité thermique de l'Onéral en fonction de la température

Ici également, nous avons observé pour les basses températures la quasi-synchronisation des signaux (SR) et (SC) et, pour les hautes températures, de (SE) et (SC) (*fig. 22 et 23*, courbes XI et XII).

Les variations de la diffusivité en fonction de la température sont indiquées (*fig. 24*, courbes XIII). Du fait que l'on a affaire à un alliage où les constituants forment des phases, il n'est pas possible d'évaluer, même d'une façon approchée, la chaleur spécifique comme ce serait possible si les constituants ne formaient que des solutions solides; de ce fait, il n'est pas possible de connaître la loi exacte de la variation de la conductivité en fonction de la température.

Les résultats sont résumés dans le tableau VIII ci-après.

TABLEAU VIII

Température (°C)	$\frac{\lambda}{c\rho}$
69	0,033
212	0,036
283	0,042
410	0,056
571	0,058
679	0,058

Ces résultats sont plausibles, étant donné que l'on a affaire à un alliage réfractaire.

CONCLUSION

La méthode du signal périodique, appliquée à des éprouvettes de dimensions réduites, est une méthode de choix du fait de la simplicité de l'appareillage.

Si la précision est bonne aux basses températures, elle l'est moins aux températures élevées supérieures à 600° du fait de l'importance du coefficient h ; il est difficile de donner une limite supérieure de cette erreur par suite des termes correctifs dus au signal correspondant qui deviennent alors importants. Il semble néanmoins qu'il faille s'attendre à une précision de l'ordre de 10 %, grandeur encore acceptable pour des mesures à haute température.

Est-il possible d'effectuer des mesures pour des températures plus élevées que celles déjà atteintes (900° C environ)? La grande difficulté proviendrait de l'amortissement alors trop important; un appareil de détection ultra-sensible serait alors indispensable. Aussi la température de 1 000° C ne saurait être dépassée facilement par la méthode du signal.

Néanmoins l'intervalle de température 0-1 000° est souvent suffisant pour les besoins actuels de la métallurgie.

Jusqu'à présent, toutes les mesures de conductivité thermique des conducteurs s'effectuaient par les méthodes de régime permanent, les méthodes transitoires n'étant connues que comme des curiosités. Nous avons maintenant à notre disposition un nouveau procédé de mesure beaucoup plus simple. Le processus du dépouillement, maintenant codifié, ne doit plus effrayer et la précision est certainement aussi bonne.

La méthode du signal périodique peut et doit désormais s'employer concurremment avec les autres méthodes.

DEUXIÈME PARTIE

SUR LA DÉTERMINATION DE LA CONDUCTIVITÉ THERMIQUE DES ISOLANTS PAR LA MÉTHODE DU TOUCHAU

GÉNÉRALITÉS SUR LES PROCÉDÉS DE MESURE DE LA CONDUCTIVITÉ THERMIQUE DES ISOLANTS PAR LES MÉTHODES TRANSITOIRES

1. - AVANTAGES ET INCONVÉNIENTS DES MÉTHODES DE RÉGIME PERMANENT

Pour les isolants comme pour les conducteurs, les méthodes de mesure en régime permanent semblent au premier abord de beaucoup les plus souhaitables, car plus simples à réaliser. En effet :

- la température n'évoluant pas, la mesure ne paraît pas présenter de difficulté;
- l'évaluation du flux thermique se ramenant, soit à la mesure d'une puissance électrique, soit à la mesure d'un débit de fluide, ne semble pas non plus poser de problème;
- la forme très simplifiée de l'équation thermocinétique, tout, enfin, nous incite à retenir ce genre de mesure.

Mais si l'on examine les choses de plus près, les difficultés apparaissent et deviennent, comme toujours, de plus en plus nombreuses. En effet :

- il faut éliminer les causes d'erreur dues à la déperdition latérale, ce qui ne peut se faire sans un dispositif de garde le plus souvent asservi au dispositif chauffant;
- avant d'effectuer la mesure, il faut être certain que le régime permanent soit établi, ce dont on n'est jamais absolument sûr, du fait que ce régime s'établit d'une façon asymptotique. La durée d'établissement, fort longue (un ou deux jours dans certains cas) pose de graves problèmes de régulations de tension, débit, température du fluide. De plus, de nombreuses sécurités s'avèrent indispensables;
- les mesures de température s'effectuant le plus souvent avec des couples thermo-électriques, il est indispensable de connaître très exactement la distance séparant les couples de mesure, chose difficile si ceux-ci sont noyés dans l'éprouvette à étudier, plus facile s'ils sont simplement placés sur les faces planes et parallèles de l'éprouvette. Mais des précautions sont alors à prendre relativement aux résistances thermiques de contact.

Finalement, les difficultés expérimentales sont telles, qu'il faut vraiment d'impérieuses raisons pour utiliser les méthodes de régime permanent. Aussi s'oriente-t-on de plus en plus vers les méthodes de mesure en régime transitoire.

II. — AVANTAGES ET INCONVÉNIENTS DES MÉTHODES DE RÉGIME TRANSITOIRE

Dans ce dernier cas, la chaleur s'écoulant sans qu'il soit question d'attendre l'établissement du régime stationnaire, les variations de température sont fonction du temps et de la capacité calorifique de l'éprouvette. Aussi devons-nous attendre à voir intervenir en plus de la conductivité thermique λ , la chaleur spécifique par unité de masse c et la densité ρ de la substance.

Les avantages de ces nouvelles méthodes sont les suivants :

- simplicité de l'appareillage, entre autres, suppression du dispositif calorimétrique de mesure du flux;
- rapidité de la mesure. Quelques minutes suffisent dans la plupart des cas;
- inutilité ou presque du dispositif de garde, soit que le corps se refroidisse naturellement (méthodes de refroidissement), soit que l'on opère pendant des temps courts sur des éprouvettes à faces planes et parallèles (méthodes du signal), le flux de chaleur cheminant de préférence dans le sens de l'épaisseur (plus court chemin) plutôt que dans le sens radial;
- plus grande simplicité de montage due à la moindre importance de la position du couple de mesure;
- plus grande précision dans la mesure des températures, car tout comme dans la méthode du signal relative aux conducteurs, on élimine l'imprécision due au fait qu'on n'est jamais certain de se trouver en régime permanent;
- faible intervalle de température nécessaire à la mesure et dans lequel on doit supposer constantes les grandeurs à mesurer.

Mais en revanche, les inconvénients sont les suivants :

- difficulté de résolution de l'équation thermocinétique : il faut préciser les conditions aux limites et souvent, ce n'est qu'au moyen d'artifices mathématiques fort subtils que l'on arrive au résultat. Mais le calcul est fait une fois pour toutes;
- dépouillement, parfois long, des expériences;
- dans beaucoup de cas, la mesure de température s'effectuant, soit directement au moyen du contact d'un couple sur l'éprouvette, soit indirectement en mesurant la température d'un conducteur en contact avec celle-ci, la résistance de contact a une énorme importance. Il est donc absolument indispensable soit d'éliminer ce contact par un artifice quelconque, soit d'en tenir compte, c'est-à-dire en fait de le mesurer. Il faut en outre que ce contact soit toujours constant et non pas intermittent ni à caractère évolutif, ce qui ne manquerait pas de se produire lors d'une élévation de température importante. C'est dans cette résistance de contact que réside en fait la principale difficulté des méthodes transitoires, laquelle a souvent empêché l'extension de ces méthodes à des températures élevées.

— On ne mesure pas directement λ , mais une combinaison de λ et de $c\rho$.
La connaissance de λ suppose donc celle de $c\rho$.

III. — LES MÉTHODES DE REFROIDISSEMENT

Un premier groupe de méthodes, que nous appellerons *méthodes de refroidissement*, consiste à laisser refroidir dans une vaste enceinte une éprouvette de forme géométrique simple (cylindre, cube, sphère) préalablement portée à une température légèrement supérieure (10 à 20° C) à celle de l'enceinte. Un couple thermo-électrique placé au centre de l'éprouvette et éventuellement un second couple, placé à une distance connue du premier, permettent de connaître les lois du refroidissement en deux points. De la comparaison de ces lois, on en déduit la diffusivité.

Cette méthode peut être transposée en une méthode d'échauffement : une source de chauffage de puissance connue est placée au centre ou dans l'axe de l'éprouvette et l'on mesure les températures à des distances différentes.

Dans la presque totalité des cas, les mesures sont effectuées pour des températures peu élevées.

Nous donnons [34 à 63] une bibliographie de cette méthode et de ses variantes.

IV. — LES MÉTHODES DU SIGNAL

Un second groupe de méthodes, que nous appellerons *méthodes du signal* consiste à créer sur une des faces d'une éprouvette à faces planes et parallèles un signal thermique (signal émis), soit que l'on dirige sur une face un flux thermique connu, soit que l'on porte au contraire cette même face à une certaine température suivant un programme plus ou moins rapide. Sur l'autre face de l'éprouvette, on observe l'apparition de ce signal (signal reçu) et son évolution en fonction du temps [63 à 79].

La principale difficulté expérimentale réside dans le fait qu'il est absolument indispensable d'éliminer tout phénomène parasite susceptible de perturber le signal reçu (en particulier les mauvais contacts et les déperditions parasites), ce que l'on fait souvent dans le premier cas en utilisant un double montage symétrique. La méthode est alors quasi-parfaite; elle a le double avantage de donner à la fois λ et $c\rho$. Mais ici encore dans la totalité des cas, les mesures ne sont possibles qu'au voisinage de la température ambiante.

Plus simple encore, tout au moins en apparence, est la méthode dite du *touchau*. Elle présente cet avantage d'être un compromis entre les deux méthodes précédentes. Encore fort peu connue et utilisée, c'est précisément elle que nous nous sommes proposés d'étudier.

CHAPITRE II

LA MESURE DE LA CONDUCTIVITÉ THERMIQUE DES ISOLANTS PAR LA MÉTHODE DITE DU TOUCHAU

ÉTUDE THÉORIQUE

I. — GÉNÉRALITÉS

On appelle coefficient d'arrachement thermique d'un corps la racine carrée du double produit des trois grandeurs λ , c , ρ , λ étant la conductivité thermique de ce corps, c sa chaleur spécifique par unité de masse et ρ sa masse spécifique. Cette grandeur s'oppose souvent à la diffusivité thermique qui n'est autre que le quotient $\frac{\lambda}{c \rho}$.

L'appellation coefficient d'arrachement vient du fait que lors du contact entre deux solides, les températures prises par l'un et l'autre corps mettent en jeu les doubles produits $\lambda c \rho$ qui conditionnent en quelque sorte un arrachement de chaleur au premier et un transfert au second.

II. — LES TOUCHAUS

1. — Définition.

Les touchaus sont des détecteurs artificiels constitués par une masse conductrice de capacité calorifique connue et dont la température uniforme est légèrement supérieure à celle du corps massif à étudier, généralement isolant, que l'on dispose au contact de sa section droite terminale.

Autour du touchau, un dispositif de garde, destiné à supprimer ou à réduire les échanges thermiques avec l'air ambiant, est constitué par une masse enveloppante de même nature conductrice; sa surface de contact avec l'isolant est telle que le rapport

$\frac{\text{masse}}{\text{surface de contact}}$ est le même que le rapport correspondant du touchau.

Le dispositif précédent devant jouer le rôle de garde, il importe de séparer thermiquement celle-ci du touchau, ce que l'on fait au moyen d'une mince feuille de papier;

de plus, elle doit être isolée par un moyen quelconque de l'extérieur afin d'empêcher les échanges par convection avec l'atmosphère ambiante. Si l'on utilise un calorifuge, ce dernier doit être suffisamment mince pour ne pas donner lieu à des échanges thermiques avec la garde dans un sens comme dans l'autre.

2. — Principe de la méthode.

La méthode de mesure du coefficient d'arrachement par le touchau est une méthode de régime variable : on observe pendant un temps relativement court (une minute au plus) l'allure du refroidissement du touchau lorsqu'il est placé en contact avec le corps à étudier. Ce corps est d'ailleurs supposé indéfini dans le sens de son épaisseur. Comme en fait il est toujours limité, la mesure doit être effectuée en un temps tel que la bouffée de chaleur n'ait pas le temps de parvenir à la face terminale; c'est ce qui limite précisément le plus souvent à une minute ou moins la durée de l'expérience.

C'est de la loi de refroidissement en fonction du temps que l'on déduit la valeur du coefficient d'arrachement.

L'idée originale de la méthode du touchau revient à M. VERNOTTE [79]. A notre connaissance, la seule vérification expérimentale a été effectuée par M. ACLOQUE [80] dans sa thèse sur la conductibilité des verres trempés. Encore ne s'est-il borné qu'à des mesures relatives sans trop se préoccuper de la théorie.

Le présent travail constitue donc la première vérification expérimentale de la méthode en tant que méthode de mesure absolue.

III. — ÉTUDE THÉORIQUE

La théorie a été développée par M. VERNOTTE [81]. Nous en indiquerons ici seulement l'essentiel, le contact touchau-isolant étant supposé parfait.

Considérons donc un solide initialement à la température zéro et supposé indéfini dans le sens de son épaisseur que nous prendrons comme sens des x positifs. Portons et maintenons la face $x = 0$ à la température θ . La distribution de température dans le solide est fonction de l'abscisse x et du temps t :

$$\theta(x, t) = \theta_0 - \frac{\theta_0}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c\rho}{\lambda}} \int_0^x e^{-\frac{c\rho z^2}{4\lambda t}} dz.$$

Au bout du temps très court τ , superposons à cette distribution celle qui résulte de l'application brusque sur la même face $x = 0$ du milieu initialement à la température zéro, de la température $-\theta_0$ et de son maintien, c'est-à-dire :

$$\theta(x, t) = -\theta_0 + \frac{\theta_0}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c\rho}{\lambda}} \int_0^x e^{-\frac{c\rho z^2}{4\lambda(t-\tau)}} dz.$$

Ceci équivaut, la température du corps étant initialement à zéro, à appliquer sur la face $x = 0$, la température θ_0 pendant un temps τ très court, la température zéro étant ensuite maintenue sur cette même face lors des instants ultérieurs.

Dans ces conditions, l'échauffement résultant est naturellement la somme des deux expressions précédentes, soit :

$$\theta(x, t) = \frac{\theta_0}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c\rho}{\lambda}} \left[\int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{c\rho z^2}{4\lambda}} dz - \int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{c\rho z^2}{4\lambda}} dz \right] \\ \frac{1}{2} \frac{\theta_0}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c\rho}{\lambda}} x \frac{\tau}{t^{3/2}} e^{-\frac{c\rho x^2}{4\lambda\tau}}.$$

Si maintenant on porte la face $x = 0$ du solide initialement tout entier à la température zéro, à la température $T_0(\tau)$, à l'époque τ , et pendant le temps $d\tau$, il en résulte à la distance x , pour le temps t , une température θ définie par :

$$d\theta = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c\rho}{\lambda}} x T_0(\tau) e^{-\frac{c\rho x^2}{4\lambda(t-\tau)}} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}},$$

d'où :

$$\theta = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c\rho}{\lambda}} x \int_0^t T_0(\tau) e^{-\frac{c\rho x^2}{4\lambda(t-\tau)}} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}.$$

Cette température $T_0(\tau)$ est imposée; c'est la température des masses conductrices. En écrivant la continuité du flux thermique lors du passage métal-isolant, on a en désignant par γ la capacité calorifique du touchau par unité de surface de contact :

$$\gamma \frac{dT_0}{dt} = \lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=0}.$$

Il nous faut donc calculer $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ pour $x = 0$.

Faisons tout d'abord le changement de variable $\frac{c\rho x^2}{4\lambda(t-\tau)} = u^2$,

il vient :

$$\theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \sqrt{\frac{c\rho}{4\lambda t}} T_0 \left(t - \frac{c\rho x^2}{4\lambda u^2} \right) e^{-u^2} du$$

et, par dérivation sous le signe somme :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c\rho}{\lambda}} \frac{1}{\sqrt{t}} T_0(0) e^{-\frac{c\rho x^2}{4\lambda t}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \sqrt{\frac{c\rho}{4\lambda t}} T_0' \left(t - \frac{c\rho x^2}{4\lambda u^2} \right) e^{-u^2} \frac{c\rho x}{\lambda u^2} du.$$

Comme c'est pour $x = 0$ que nous cherchons la valeur de $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, partageons l'intervalle d'intégration en deux parties au moyen d'un nombre a :

$$\int_x^\infty \sqrt{\frac{c\rho}{4\lambda t}} = \int_x^a \sqrt{\frac{c\rho}{4\lambda t}} + \int_a^\infty = I_1 + I_2.$$

La seconde intégrale I_2 est normale en tous ses éléments. Comme elle porte sur une quantité qui contient x en facteur, elle disparaît d'elle-même. Reste donc l'intégrale I_1 d'expression :

$$I_1 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^a \sqrt{\frac{c\rho}{4\lambda t}} T_0' \left(t - \frac{c\rho x^2}{4\lambda u^2} \right) e^{-u^2} \frac{c\rho x}{\lambda u^2} du.$$

Nous poserons là encore :

$$\frac{c \rho x^2}{4 \lambda u^2} = t v^2,$$

c'est-à-dire :

$$u = \frac{x}{v} \sqrt{\frac{c \rho}{4 \lambda t}},$$

d'où :

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c \rho t}{\lambda}} \int_0^1 \frac{1}{a \sqrt{\frac{c \rho}{4 \lambda t}}} T_0' [t (1 - v^2)] e^{-\frac{c \rho x^2}{4 \lambda t v^2}} dv.$$

Or, quand x tend vers zéro, l'exposant de l'exponentielle tend vers zéro sauf si v est précisément égal à la limite inférieure de cette exponentielle; on peut donc remplacer sous le signe somme, pour $x = 0$, l'exponentielle par l'unité d'où :

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c \rho t}{\lambda}} \int_0^1 T_0' [t (1 - v^2)] dv$$

et l'on a finalement en posant $t (1 - v^2) = s$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=0} = - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c \rho}{\lambda t}} T_0 (0) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c \rho}{\lambda}} \int_0^t \frac{T_0' (s)}{\sqrt{t-s}} ds$$

et d'après l'équation de continuité :

$$\gamma \frac{dT_0}{dt} = - \frac{\sqrt{\lambda c \rho}}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^t \frac{T_0' (s)}{\sqrt{t-s}} ds + \frac{T_0 (0)}{\sqrt{t}} \right].$$

Posons maintenant $\frac{\sqrt{\lambda c \rho}}{\gamma} = n$, il vient :

$$\int_0^t \frac{T_0' (s)}{\sqrt{t-s}} ds = - \frac{\sqrt{\pi}}{n} T_0' (t) - \frac{T_0 (0)}{\sqrt{t}}.$$

On se trouve devant une équation intégrale-différentielle du type VOLTERRA, qui se résout au moyen de l'artifice suivant.

Multiplions les deux membres par $\frac{dt}{\sqrt{\alpha-t}}$, α étant une constante, et intégrons de 0 à α , il vient :

$$\int_0^\alpha \frac{dt}{\sqrt{\alpha-t}} \int_0^t \frac{T_0' (s)}{\sqrt{t-s}} ds = - T_0 (0) \int_0^\alpha \frac{dt}{\sqrt{(\alpha-t)t}} - \frac{\sqrt{\pi}}{n} \int_0^\alpha \frac{T_0' (t)}{\sqrt{\alpha-t}} dt.$$

La formule de LEJEUNE-DIRICHLET appliquée au premier membre donne :

$$\int_0^\alpha dt \int_0^t f (t, s) ds = \int_0^\alpha ds \int_s^\alpha f (t, s) dt,$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^\alpha \frac{dt}{\sqrt{\alpha-t}} \int_0^t \frac{T_0' (s)}{\sqrt{t-s}} ds = \int_0^\alpha ds \int_s^\alpha \frac{T_0' (s) dt}{\sqrt{(\alpha-t)(t-s)}} = \int_0^\alpha T_0' (s) ds \int_s^\alpha \frac{dt}{\sqrt{(\alpha-t)(t-s)}}$$

et, en tenant compte du fait que :

$$\int_0^\alpha \frac{dt}{\sqrt{(\alpha-t)t}} = \int_s^\alpha \frac{dt}{\sqrt{(\alpha-t)(t-s)}} = \pi.$$

finalemt, nous pouvons écrire :

$$\int_0^\alpha T'_0(s) ds = -T_0(0) - \frac{1}{n\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha \frac{T'_0(t)}{\sqrt{\alpha-t}} dt$$

et, en remplaçant t par s dans l'intégrale du second membre :

$$\int_0^\alpha T'_0(s) ds = T_0(0) - \frac{1}{n\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha \frac{T'_0(s)}{\sqrt{\alpha-s}} ds.$$

Remplaçons maintenant t par α , α par t dans les deux membres, il vient :

$$\int_0^t T'_0(s) ds = -T_0(0) - \frac{1}{n\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{T'_0(s)}{\sqrt{t-s}} ds.$$

Or, nous avons trouvé pour la dernière intégrale l'expression :

$$\int_0^t \frac{T'_0(s)}{\sqrt{t-s}} ds = -\frac{\sqrt{\pi}}{n} T'_0(t) - \frac{T_0(0)}{\sqrt{t}},$$

d'où :

$$\int_0^t T'_0(s) ds = T_0(t) - T_0(0) = -T_0(0) + \frac{1}{n^2} T'_0(t) + \frac{1}{n\sqrt{\pi}} \frac{T_0(0)}{\sqrt{t}}.$$

Remplaçons, pour simplifier, $T_0(0)$ par T_0 et $T_0(t)$ par T , on est ainsi ramené à l'équation différentielle suivante :

$$T = \frac{T'_0}{n^2} + \frac{T_0}{n\sqrt{\pi t}}.$$

elle s'intègre de la manière classique; nous avons sans second membre :

$$T = \frac{T'_0}{n^2}, \quad \text{d'où} \quad T = A e^{n^2 t},$$

et, en faisant varier la constante A :

$$\frac{A'}{n^2} e^{n^2 t} + \frac{T_0}{n\sqrt{\pi t}} = 0, \quad \text{d'où} \quad A' = -\frac{T_0 n e^{-n^2 t}}{\sqrt{\pi t}} \quad \text{et} \quad A = -\frac{T_0 n}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-n^2 t}}{\sqrt{t}} dt + C T_0.$$

Posons maintenant $n\sqrt{t} = m$, il vient :

$$A = -\frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^m e^{-u^2} du + C T_0,$$

d'où, finalement :

$$T = T_0 e^{m^2} \left(C - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^m e^{-u^2} du \right).$$

Si l'on remarque que, pour $m = 0$, c'est-à-dire pour $t = 0$, on doit avoir $T = T_0$, on en déduit aussitôt $C = 1$, d'où l'expression finale :

$$\frac{T}{T_0} = e^{m^2} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^m e^{-u^2} du \right).$$

Remarquons immédiatement que, pour m petit, on a sensiblement :

$$\frac{T}{T_0} \neq 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} m + m^2.$$

Nous avons établi, pour différentes valeurs de m et de $\text{Log}_{10} m$, les tableaux des valeurs numériques (tabl. IX et IX bis) de cette fonction $\frac{T}{T_0}$ et avons tracé la courbe $\frac{T_0}{T} = f(\text{Log}_{10} m)$. C'est la courbe théorique (fig. 25, courbe XIV A).

Ceci étant, l'expérience de refroidissement ayant été effectuée, on trace la courbe expérimentale d'expression :

$$\frac{T}{T_0} = f\left(\frac{1}{2} \text{Log}_{10} t\right)$$

et pour une même valeur des ordonnées, on essaie de réaliser la superposition des courbes théorique et expérimentale; le décalage des abscisses donne précisément $\text{Log}_{10} \frac{\sqrt{\lambda c \rho}}{\gamma}$ d'où $\lambda c \rho$.

Les mesures de la chaleur spécifique et de la densité étant plus aisées et de plus, moins variables d'un corps à un autre, il est normal de leur ramener la mesure de la conductivité thermique.

IV. — PRÉCISION DE LA MÉTHODE

Elle est naturellement fonction de la plus ou moins bonne coïncidence entre les courbes théorique et expérimentale.

Si ΔX est l'erreur absolue commise lors de la superposition, on a évidemment :

$$\Delta X = \Delta \left(\text{Log}_{10} \frac{\sqrt{\lambda c \rho}}{\gamma} \right)$$

et si l'on suppose l'erreur sur γ négligeable :

$$\Delta X = \frac{M}{2} \frac{\Delta(\lambda c \rho)}{\lambda c \rho}, \quad (M \neq 0,434).$$

Supposons c et ρ connus exactement, on a :

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{2}{M} \Delta X.$$

TABLEAU IX

$$\frac{T}{T_0} = e^{m^2} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^m e^{-u^2} du \right)$$

m	m^2	em^2	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^m e^{-u^2} du$	$1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^m e^{-u^2} du$	$\text{Log}_{10} m$	$\text{Log}_{10} m^2$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{T_0}{T}$
0,01	0,0001	1,00010	0,0112833	0,9887167	-2,00000	-4,00000	0,9887	1,0114
0,02	0,0004	1,00040	0,0225644	0,9774356	-1,69897	-3,39794	0,9774	1,0231
0,03	0,0009	1,00090	0,0338410	0,9661590	-1,52290	-3,04580	0,9662	1,0350
0,04	0,0016	1,00160	0,0451109	0,9548891	-1,39794	-2,79588	0,9564	1,0456
0,05	0,0025	1,00250	0,0563718	0,9436282	-1,30103	-2,60206	0,9459	1,0572
0,06	0,0036	1,00361	0,0676215	0,9323785	-1,22185	-2,44370	0,9357	1,0687
0,07	0,0049	1,00491	0,0788577	0,9211423	-1,15490	-2,30980	0,9257	1,0803
0,08	0,0064	1,00642	0,0900871	0,9099129	-1,09691	-2,19382	0,9157	1,0921
0,09	0,0081	1,00813	0,1012806	0,8987194	-1,04576	-2,09152	0,9060	1,1038
0,10	0,0100	1,01005	0,1124630	0,8875370	-1,00000	-2,00000	0,8965	1,1155
0,15	0,0225	1,02275	0,1679959	0,8320041	-0,82381	-1,64762	0,8509	1,1752
0,20	0,0400	1,04081	0,2227025	0,7772975	-0,69897	-1,39794	0,8090	1,2361
0,30	0,0900	1,09417	0,3286267	0,6713733	-0,52288	-1,04576	0,7346	1,3613
0,40	0,1600	1,17351	0,4283922	0,5716078	-0,39794	-0,79588	0,6854	1,4590

TABLEAU IX *bis*

$$\frac{T}{T_0} = e^{m^2} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^m e^{-u^2} du \right) \approx 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} m + m^2$$

m	$\text{Log}_{10} m$	$\frac{T}{T_0}$
0,00100	— 3,0	0,9989
0,00126	— 2,9	0,9986
0,00158	— 2,8	0,9982
0,001995	— 2,7	0,9978
0,00251	— 2,6	0,9972
0,00316	— 2,5	0,9965
0,00398	— 2,4	0,9955
0,00502	— 2,3	0,9943
0,00630	— 2,2	0,9929
0,00794	— 2,1	0,9911
0,01000	— 2,0	0,9887
0,01260	— 1,9	0,9859
0,01585	— 1,8	0,9824

Si l'on prend $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{5}{100}$, erreur très acceptable pour des mesures de conductivité thermique, on a alors :

$$\Delta X = \frac{1,1}{100}.$$

Nous avons tracé en pointillé, de part et d'autre de la courbe théorique (*fig. 25*, courbe XIV A), les courbes de refroidissement correspondant à des erreurs de $\pm 5 \%$; on a ainsi une idée de l'erreur que l'on peut commettre lors de la superposition, sur la détermination de $\lambda c\rho$.

V. DÉTERMINATION DE LA DURÉE DE L'EXPÉRIENCE

Ainsi que nous l'avons dit, la théorie du touchau suppose le flux thermique unidimensionnel, le transfert de chaleur se faisant uniquement dans le sens de l'épaisseur supposée infinie de l'éprouvette. Toutefois, du fait de l'épaisseur forcément pratiquement limitée de celle-ci, il est indispensable de savoir à quel moment le signal thermique aura atteint la face terminale. L'on devra alors à cet instant arrêter l'expérience, puisque l'on cessera alors d'avoir affaire à un mur semi-infini.

A la profondeur x (profondeur comptée évidemment à partir de la surface plane de l'éprouvette), la température atteinte au bout du temps t est donnée par :

$$T = T_0 \left(1 - \sqrt{\frac{c\rho}{\pi\lambda}} \int_0^x e^{-\frac{c\rho u^2}{4\lambda}} du \right)$$

et, en faisant le changement de variable : $u = 2\sqrt{\frac{\lambda}{c\rho}} v$:

$$T = T_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{4\lambda t}{c\rho}}} e^{-v^2} dv \right).$$

Prenons $T = \frac{2 T_0}{1000}$ ce qui, pour une température T_0 de 30°C , correspond à une élévation de température de $0,06^\circ$ donc, ainsi que nous le verrons, approximativement à une division de l'échelle du galvanomètre de mesure; il vient alors :

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{4\lambda t}{c\rho}}} e^{-v^2} dv = 0,998.$$

En se référant à une table, on trouve que :

$$\sqrt{\frac{4\lambda t}{c\rho}} = 2,19, \quad \text{c'est-à-dire} \quad t = \frac{x^2}{19,18 \frac{\lambda}{c\rho}};$$

le temps limite est donc fonction, non plus du coefficient d'arrachement, mais de la diffusivité du corps étudié.

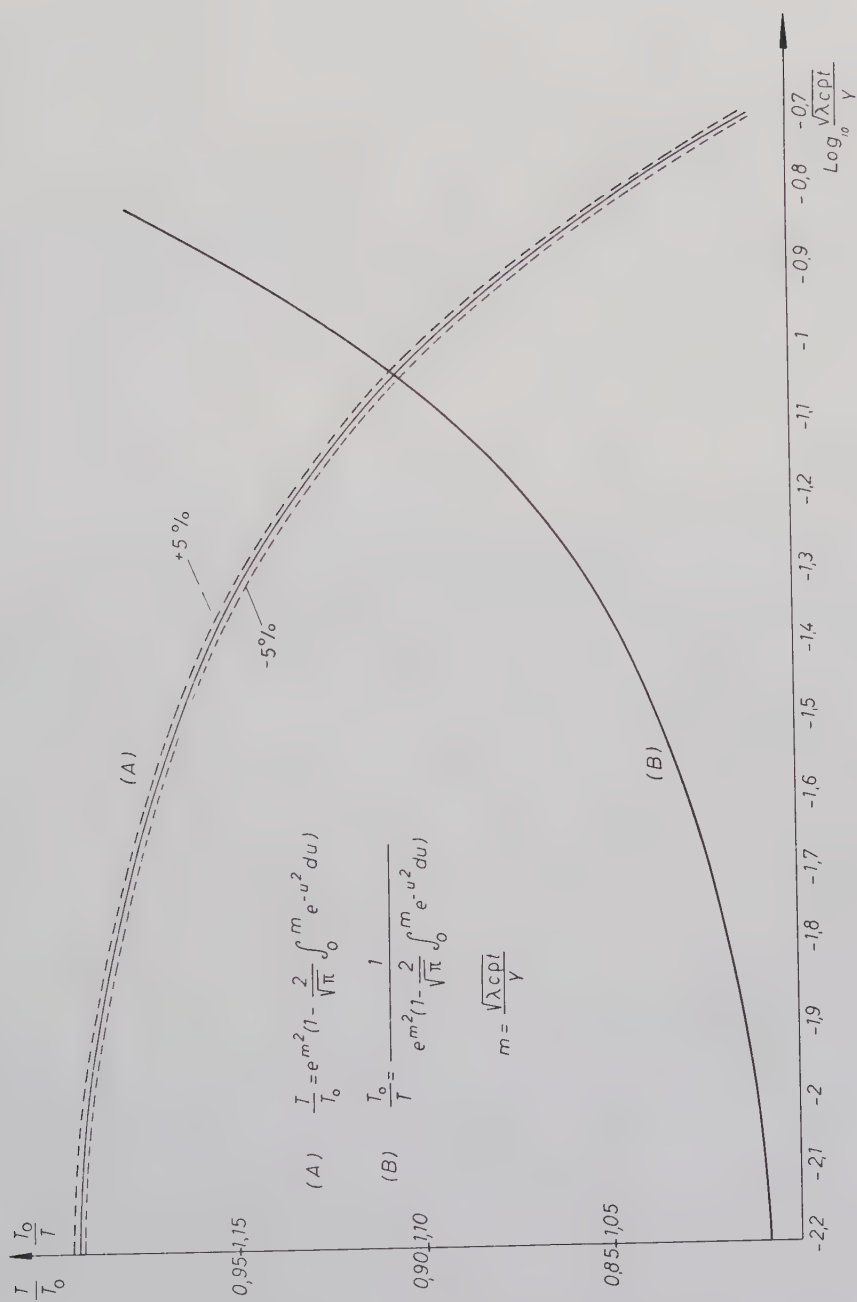


Fig. 25. — Courbes XIV. — Courbes théoriques de refroidissement du touchau

Dans le cas d'une épaisseur de 1 cm, on aura :

— pour le plexiglas ordi-			
naire.....	$\lambda = 5,0 \cdot 10^{-4}$,	$c \rho = 0,41$,	$t = 43$ s,
— pour le carton			
d'amiante	$\lambda = 2,5 \cdot 10^{-4}$	$c \rho = 0,20$,	$t = 42$ s,
— pour le verre.....	$\lambda = 2,0 \cdot 10^{-3}$	$c \rho = 0,45$,	$t = 13$ s,
— pour l'alumine.....	$\lambda = 4,0 \cdot 10^{-2}$	$c \rho = 0,80$,	$t = 1$ s,
— pour le cuivre.....	$\lambda = 0,93$	$c \rho = 0,83$,	$t = 0,05$ s,

mais

— pour le liège aggloméré.	$\lambda = 1,0 \cdot 10^{-4}$,	$c \rho = 0,06$,	$t = 32,5$ s.
— pour le contreplaqué..	$\lambda = 2,0 \cdot 10^{-4}$	$c \rho = 0,28$,	$t = 72$ s.

On voit donc combien l'expérience devra être limitée dans le temps.

VI. — LE PROBLÈME DU CONTACT IMPARFAIT

La question du contact pose une grave difficulté; la théorie précédemment développée suppose en effet le contact parfait; or, il s'avère qu'on n'est jamais absolument certain de l'obtenir et par là même, de pouvoir utiliser les résultats immédiats fournis par la courbe de refroidissement; les mesures ne sont alors plus possibles.

Il faut donc déterminer à la fois la résistance de contact et le coefficient d'arrachement; c'est à cette condition que la méthode du touchau (méthode absolue cette fois) pourra conduire à des résultats certains.

1. — Première méthode de détermination de la résistance de contact.

Une théorie des corrections dues au contact imparfait s'avérerait donc indispensable. Cette théorie est également due à M. VERNOTTE [81]; nous n'en indiquerons ici que les résultats.

Si R désigne la résistance de contact par unité de surface, nous poserons :

$$\frac{\sqrt{\lambda c \rho} t}{\gamma} = m, \quad R \frac{\lambda c \rho}{\gamma} = \mu.$$

Si m est suffisamment grand devant μ (m valant plusieurs fois μ), soit que le contact soit bon (R , donc μ étant petits), soit que l'expérience puisse durer suffisamment longtemps (t grand), la détermination de m et de μ est alors aisée.

L'expression du refroidissement s'écrit :

$$\begin{aligned} Y = \frac{T}{T_0} &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} m + m^2 - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} m^3 + \dots + \mu \left[1 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} m + 3m^2 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\mu}{m} + \dots \right] \\ &= e^{m^2} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^m e^{-u^2} du \right] + \mu \left[1 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} m + 3m^2 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\mu}{m} \right], \end{aligned}$$

or :

$$y = e^{m^2} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^m e^{-u^2} du \right),$$

est précisément la loi théorique du refroidissement dans le cas du contact parfait.

En remarquant que :

$$y^2 = 1 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} m + \left(2 + \frac{4}{\pi}\right) m^2 \neq 1 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} m + 3m^2,$$

on a, en négligeant le terme $-\frac{\mu^2}{\sqrt{\pi}m}$:

$$Y = y + \mu y^2,$$

c'est-à-dire, puisque μ est supposé petit :

$$y = Y(1 - \mu y) \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{Y} = \frac{1}{y} - \mu.$$

Il suffit donc de tracer les courbes :

$$\frac{1}{Y} = f\left(\frac{1}{2} \text{Log}_{10} t\right) \quad (\text{courbe expérimentale}),$$

$$\frac{1}{y} = f(\text{Log}_{10} m) \quad (\text{courbe théorique}).$$

Le décalage des abscisses donne $\frac{\sqrt{\lambda c \rho}}{\gamma}$.

Le décalage des ordonnées donne μ .

Nous avons figuré sur le tableau IX également, les valeurs de la nouvelle fonction $\frac{1}{y} = \frac{T_0}{T}$ et tracé sur le même graphique que la courbe de refroidissement théorique, la courbe inverse $\frac{T_0}{T} = f\left(\frac{1}{2} \text{Log}_{10} t\right)$ (fig. 25, courbe XIV B), c'est cette courbe qui nous servira lors de la détermination de μ .

2. — Seconde méthode de détermination de la résistance de contact.

Néanmoins, il peut être préférable de traiter le problème du contact imparfait de la façon suivante :

Si l'on désigne par T la température du touchau,

par $\bar{T}$ la température de la surface de l'isolant

et par R la résistance de contact par unité de surface,

T et $\bar{T}$ sont différents du fait de la résistance de contact, mais on a entre eux la relation :

$$T = \bar{T} - R\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 = \bar{T} - R\gamma \frac{\partial T}{\partial t};$$

par suite, $\bar{T}$ (température théorique qui satisfait aux lois précédemment développées dans le cas du contact parfait) est donné par :

$$\bar{T} = T + R\gamma \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Il s'agit en quelque sorte d'étudier un phénomène $\bar{T}$ qui, retouché par un amortisseur caractérisé par sa « viscosité » $R\gamma$, se trouve être régi par la loi définie par l'égalité précédente.

Il revient au même de rattacher le processus d'amortissement à une différence première qui est toujours calculable, de sorte qu'entre l'ordonnée $\bar{T}_n$ et l'ordonnée corrigée T_n existe la relation :

$$N (T_{n+1} - T_n) + T_{n+1} = \bar{T}_{n+1},$$

N étant à déterminer expérimentalement.

Pour pouvoir aisément tirer profit de cette remarque, notons que :

$$\frac{\bar{T}}{T_0} = \frac{T}{T_0} + \frac{R\gamma}{T_0} \frac{\delta T}{\delta t} = \frac{T}{T_0} + \gamma \frac{\partial \left(\frac{T}{T_0} \right)}{\partial t}.$$

Il suffit donc de retrancher des ordonnées expérimentales correspondant à des valeurs déterminées du temps, une grandeur proportionnelle à la valeur absolue de la dérivée par rapport au temps de cette ordonnée, le facteur de proportionnalité étant à déterminer par tâtonnement; on cherchera ensuite à effectuer la superposition des courbes comme précédemment.

Cette méthode est moins aisée, mais plus générale que la précédente, car elle ne nécessite aucune hypothèse sur les grandeurs relatives de m et μ .

Les dérivées expérimentales peuvent être calculées d'après le principe même de la méthode de mesure, encore que cela ne soit pas facile pour les premiers instants qui suivent le contact; il faut ensuite établir un tableau de correction pour différentes valeurs de γ . Tout cela est fort pénible, mais normal en Thermocinétique.

On peut d'ailleurs opérer rapidement en se contentant (exception faite pour les premiers points) des différences consécutives de $\frac{T}{T_0}$; on prend ensuite, égal à 1, le terme correctif correspondant au dernier point expérimental, les autres valant 1,1, 1,2, 1,5, etc. Il suffit ensuite de présenter l'une sur l'autre les courbes théorique et expérimentales, l'écart des ordonnées que nous avons pris égal à 1 pour le dernier point devant valoir 1,1, 1,2, 1,5, ..., pour les points précédents correspondant à des valeurs déjà repérées du temps.

Avec un peu d'habitude, on arrive fort bien à placer la courbe expérimentale par rapport à la courbe théorique, les écarts étant proportionnels aux différences premières. Nous en donnerons un exemple.

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

I. LA RÉALISATION DU TOUCHAU ET DE SA GARDE

1. — Caractéristiques géométriques.

Afin d'assurer une bonne homogénéité de température, il est indispensable que le touchau et sa garde soient en cuivre ou en argent, ces deux métaux étant au point de vue thermique les meilleurs conducteurs que l'on connaisse.

La simplification des calculs de détermination des cotes, la simplification de la réalisation mécanique, du bobinage et du calorifugeage, nous a conduit à abandonner pour la garde la forme cylindro-conique, pour adopter la forme cylindrique.

Pour en déterminer les dimensions, on a procédé de la façon suivante. On se donne *a priori* la forme indiquée que la figure 26, ainsi que les grandeurs u , v , R_1 , R_2 . La hauteur

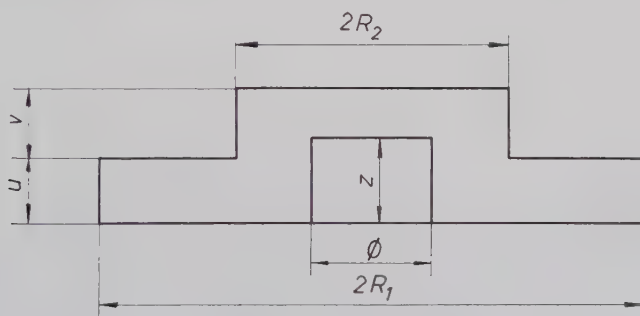


Fig. 26. — Calcul d'un touchau

z et le rayon φ du touchau sont liés par la relation que l'on formera en écrivant que les rapports $\frac{\text{volume}}{\text{surface}}$ sont égaux pour le touchau et sa garde :

$$z = \frac{\pi R_2^2 v + \pi R_1^2 u - \pi \varphi^2 z}{\pi R_1^2 - \pi \varphi^2} = u + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 v.$$

La hauteur du touchau est alors indépendante de son diamètre. Ce calcul ne constitue naturellement qu'une approximation. Mais il est facile, une fois le touchau et sa garde terminés, d'effectuer une légère retouche sur cette dernière.

Il est bien évident que, si l'on étudie des matériaux très isolants, on a intérêt à accélérer le refroidissement en utilisant un touchau de hauteur réduite et de grande surface.

2. — Interactions thermiques entre le touchau et sa garde.

Comment maintenant choisir le rayon du touchau? Il faut, pour cela, songer à la perturbation qu'apporte les dimensions finies de la garde; il faut, en particulier, que cette perturbation ne se fasse sentir qu'après le temps que nous avons déjà calculé comme étant la limite supérieure de la durée de l'expérience.

Si x désigne toujours la distance atteinte à l'instant t par le signal thermique se propageant dans le sens de l'épaisseur du matériau (transfert unidimensionnel), la perturbation thermique présente, par rapport à la perturbation initiale, un facteur de réduction dont l'élément essentiel est l'exponentielle : $e^{-\frac{c \rho x^2}{4 \lambda t}}$.

Si, de plus, r désigne la distance entre une extrémité du touchau et l'extrémité la plus voisine de la garde, le signal thermique se propageant dans le sens radial, présente à l'instant t par rapport à la perturbation initiale et lorsqu'il atteint l'extrémité de ladite garde, le facteur d'amortissement : $e^{-\frac{c \rho r^2}{4 \lambda t}}$.

Si l'on veut que les perturbations extérieures soient sans influence par trop notable sur le signal unidimensionnel, il faut que l'on ait :

$$\frac{e^{-\frac{c \rho r^2}{4 \lambda t}}}{e^{-\frac{c \rho x^2}{4 \lambda t}}} < 1.$$

Cette condition s'exprime par :

$$e^{-\frac{c \rho (r^2 - x^2)}{4 \lambda t}} < 1,$$

c'est-à-dire par :

$$(r^2 - x^2) > 0.$$

Or, la profondeur x , atteinte au bout du temps t a été calculée précédemment; nous avons trouvé :

$$x^2 = 19,18 \frac{\lambda}{c \rho} t;$$

on en déduit aussitôt la formule approchée :

$$\frac{c \rho r^2}{\lambda t} > 19,18.$$

Envisageons le cas d'un touchau pour lequel on aurait $r = 0,75$ cm. Si l'on opère sur un bloc de plexiglas de 1 cm d'épaisseur $\left(\frac{\lambda}{c \rho} = 1,21 \cdot 10^{-3}\right)$, il est nécessaire de ne pas prolonger l'expérience au-delà de 24 s, d'où l'impérieuse nécessité de ne travailler que

pendant des temps courts, le temps limite étant d'autant plus petit que la diffusivité est plus grande. On a donc intérêt à ce que les dimensions du touchau et de sa garde ne soient pas trop réduites.

Envisageons maintenant le cas d'un touchau pour lequel on aurait $r = 2,4$ cm; il est nécessaire, si l'on opère toujours sur du plexiglas de 1 cm d'épaisseur, de ne pas dépasser 246 s, temps tout à fait raisonnable et bien supérieur au temps nécessaire au transfert du signal dans l'épaisseur de l'éprouvette. Même avec un corps de plus grande diffusivité, ce temps serait encore acceptable.

3. — Les déperditions parasites.

Toutefois si, par ces considérations élémentaires, on tient compte des perturbations dues aux dimensions limitées de la garde et de l'éprouvette, il est infiniment plus difficile de tenir compte des perturbations qui atteignent directement le touchau et la garde eux-mêmes (refroidissement par convection naturelle).

En effet, lorsqu'on met en contact le touchau et le corps à étudier il y a interférence des régimes de refroidissement (début du régime de refroidissement par convection libre et début du régime de refroidissement du fait du contact).

On ne peut que réduire le premier phénomène en entourant autant qu'il est possible la garde d'un léger calorifuge, lequel doit aussi peu que possible modifier sa capacité calorifique; ce calorifuge doit être porté à la même température que la masse métallique, sans cela le refroidissement serait perturbé. Toutefois, du fait de la bouffée de conduction (le refroidissement s'effectuant dans les premiers instants de préférence du fait du contact avec l'isolant), on peut ne pas tenir compte du refroidissement naturel du touchau et de sa garde à condition d'opérer pendant des temps aussi courts que possible.

Ce serait en tout cas une erreur grave que d'étudier la loi du refroidissement du touchau et de sa garde pris isolément, de croire que cette loi est encore vraie dans les instants qui suivent le contact et d'en tirer des conséquences.

II. — DISPOSITIFS EXPÉRIMENTAUX

1. — Les supports et les blocs chauffants.

La garde jouant par rapport au touchau le rôle d'anneau protecteur, il est indispensable que celui-ci soit isolé thermiquement de celle-là. Cet isolement est assuré par une mince feuille de papier, lequel assure également le centrage.

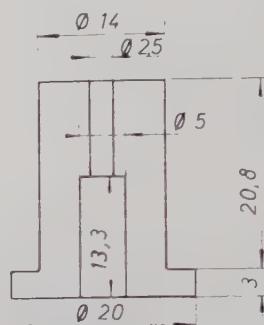
Deux minces cylindres de carton assurent le positionnement et le calorifugeage. Le cylindre qui sert de support est bobiné au moyen d'un fil résistant qui chauffe à la fois le cylindre et les blocs métalliques et qui, une fois l'équilibre thermique réalisé, diminue les déperditions calorifiques par la base. De cette façon le refroidissement s'effectue de préférence du fait du contact avec l'isolant, les déperditions par le support étant réduites.

D'autre part, un bloc métallique chauffant posé sur la partie supérieure du touchau et de sa garde permet d'élever leur température de quelques degrés au-dessus de la

température d'équilibre déjà réalisée; contrairement aux anciens dispositifs, l'ensemble du touchau et de sa garde est à poste fixe; ce sont les éprouvettes à étudier que l'on déplace et que l'on dispose à leur contact.

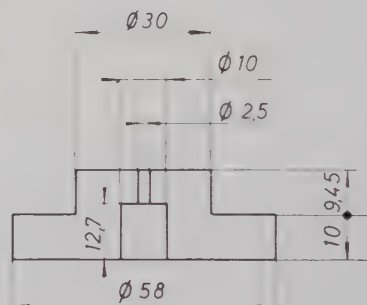
1^{er} touchau (argent)

	poids	surface
touchau : $p = 2,653 \text{ g}$	$s = 0,1964 \text{ cm}^2$	
garde : $P = 39,5474 \text{ g}$	$S = 2,9292 \text{ cm}^2$	
$\frac{p}{s} = 13,508$	$\frac{P}{S} = 13,501$	
$\gamma = 0,7296$		



2^e touchau (cuivre)

	poids	surface
touchau : $p = 8,767 \text{ g}$	$s = 0,7854 \text{ cm}^2$	
garde : $P = 286,225 \text{ g}$	$S = 25,6038 \text{ cm}^2$	
$\frac{p}{s} = 11,168$	$\frac{P}{S} = 11,179$	
$\gamma = 1,0297$		



3^e touchau (cuivre)

	poids	surface
touchau : $p = 12,617 \text{ g}$	$s = 3,1416 \text{ cm}^2$	
garde : $P = 302,5 \text{ g}$	$S = 75,3357 \text{ cm}^2$	
$\frac{p}{s} = 4,0161$	$\frac{P}{S} = 4,0154$	
$\gamma = 0,3703$		

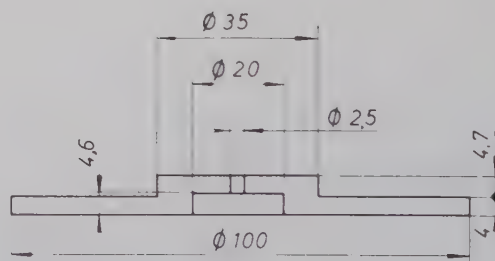


Fig. 27

Les appareils que nous avons réalisés sont représentés ainsi que leurs caractéristiques sur les figures 27. Ils sont en cuivre sauf le plus petit qui est en argent; ce dernier, surtout destiné à l'étude éventuelle d'éprouvettes de petit diamètre, est noyé dans un support en balsa qui sert aussi de calorifuge.

Les figures 28, 29, 30, 31 permettent de se rendre compte des détails de montage que nous venons de décrire.



Fig. 29. — Troisième touchau

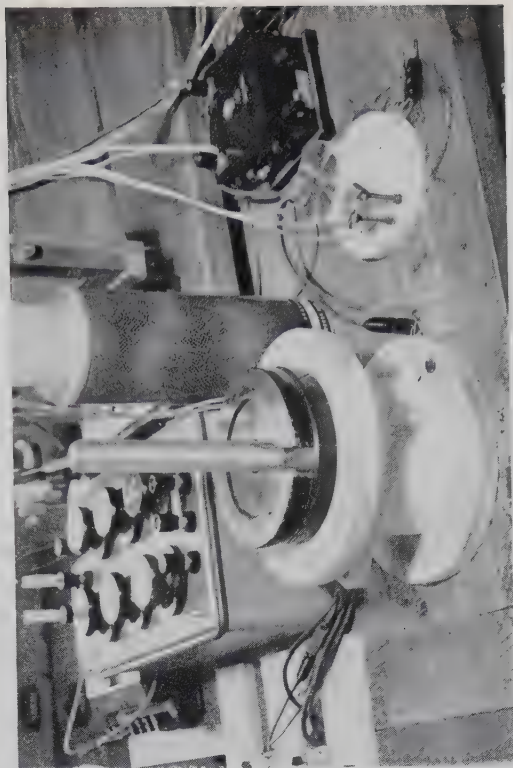


Fig. 31. — Toucheus et contacts sync hrenisateurs



Fig. 28. - Les toucheus

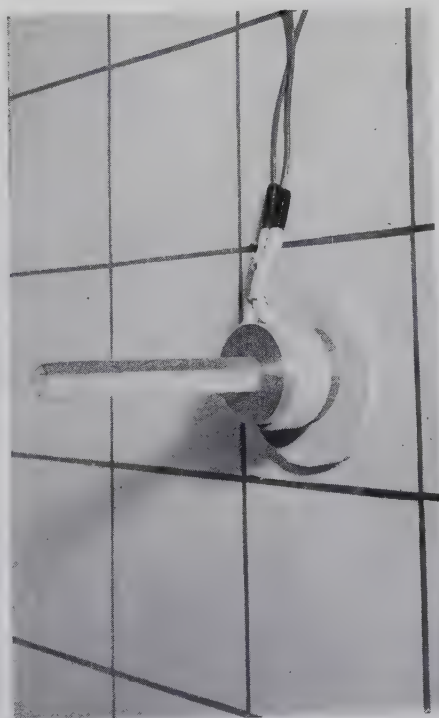


Fig. 30. — Un bloc chauffant

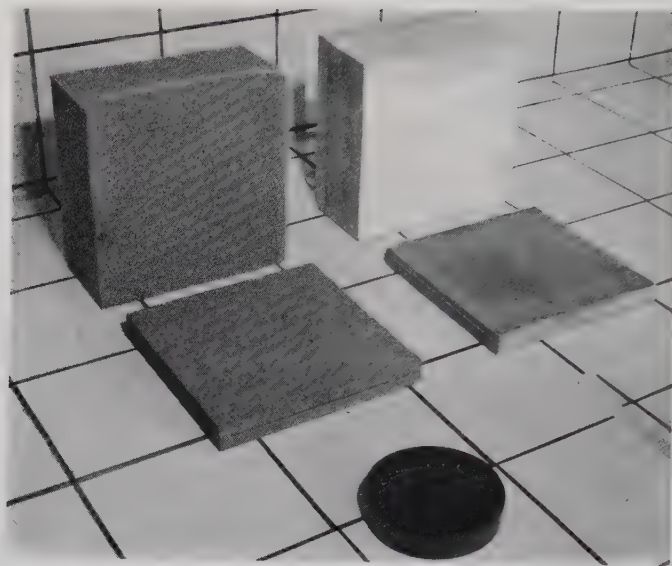


Fig. 32. — Éprouvettes diverses

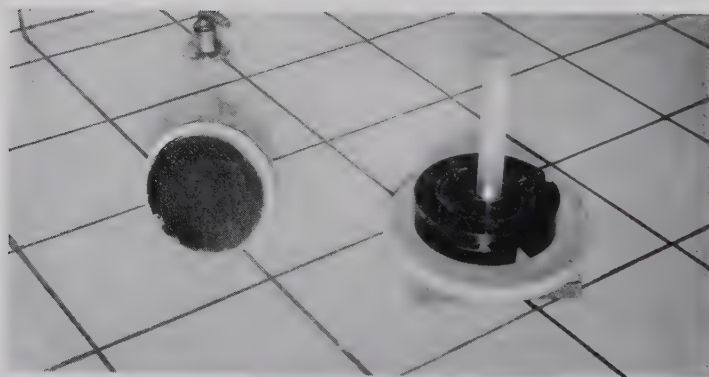


Fig. 33. — Éprouvettes sur leur support

2. — Les éprouvettes.

Elles doivent naturellement être aussi planes que possible et c'est là une grave difficulté. Il est certes possible d'avoir un poli mécanique soigné, voire un poli spéculaire mais il arrive souvent que, sous l'action de divers facteurs (temps, température), les tensions internes se relâchent, entraînant une disparition plus ou moins locale de la planéité. Il est donc très difficile d'avoir un bon contact entre le touchau et l'éprouvette. C'est pourquoi une légère pellicule d'huile, voire même une légère pression ne peuvent qu'améliorer le contact.

Les éprouvettes doivent être aussi épaisses que possible (1 cm par exemple), mais elles peuvent avoir des formes variées (disques, parallépipèdes) (*fig. 32*). Chaque fois que nous l'avons pu, nous les avons montées avant l'expérience sur un support isolant (*fig. 33*).

3. — Les mesures de température.

Elles s'effectuent simplement au moyen d'un couple thermo-électrique BTE-CTE dont l'étalonnage a été effectué avec soin (*fig. 34*, courbe XV). Ce couple est directement soudé sur le touchau.

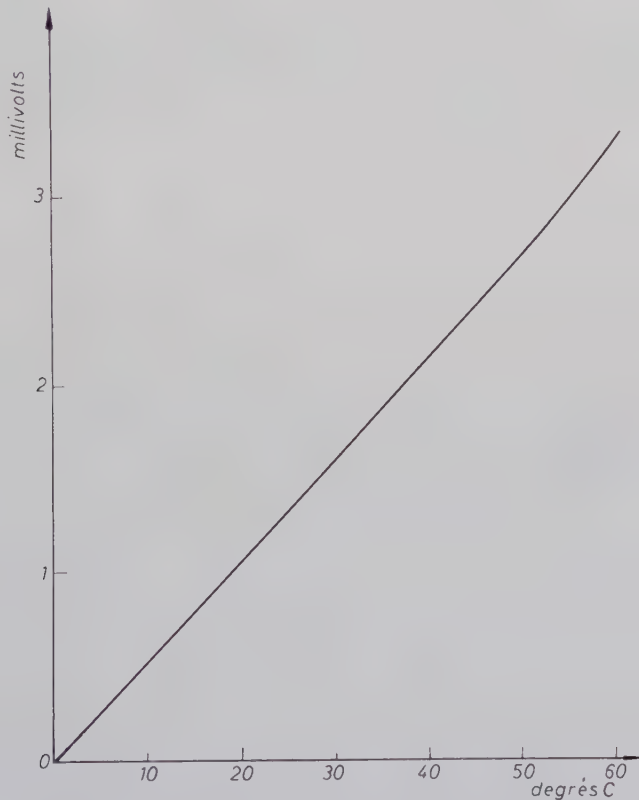


Fig. 34. — Courbe XV. — Étalonnage d'un couple BTE-CTE

Le fil choisi a 0,2 mm de diamètre. Toutefois pour ne pas avoir une trop grande résistance ohmique incompatible avec les conditions d'amortissement de l'appareil

de mesure, nous n'avons gardé que quelques centimètres de fil fin, prolongés par une tresse de fils de même nature.

Un second couple thermo-électrique, fixé sur la plaque métallique sur laquelle sont déposées les éprouvettes avant expérience, permet de connaître la température de celles-ci.

4. — Le circuit de compensation.

Un système de compensation de température s'est avéré indispensable, de façon à pouvoir observer des refroidissements de l'ordre du degré pour des températures de l'ordre de quelques dizaines de degrés. Les variations de température étant trop faibles et trop rapides, il ne fallait pas songer à employer un potentiomètre; une solution galvanométrique s'imposait. Le schéma de la partie électrique est indiqué sur la *figure 35*.

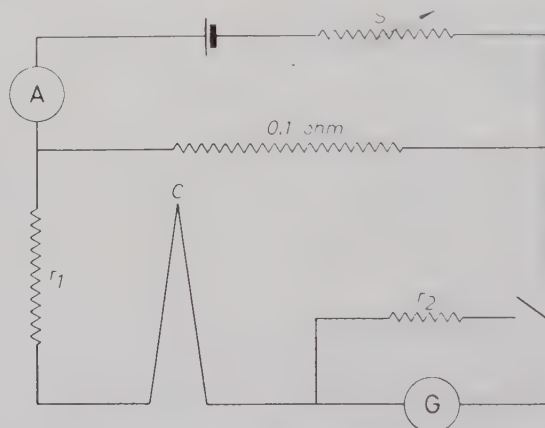


Fig. 35. — Circuit de compensation

Les résistances auxiliaires r_1 r_2 servent éventuellement à réaliser l'amortissement critique du galvanomètre de mesure. La température du touchau étant maintenue constante, on se donne plusieurs valeurs de l'intensité du courant passant dans l'ampèremètre; on note les déviations correspondantes du galvanomètre de mesure puis on substitue à ce dernier un potentiomètre et on note les tensions correspondantes.

5. — Appareils de mesure et d'enregistrement.

Les caractéristiques du galvanomètre utilisé ⁽¹⁾ étaient les suivantes :

- type AOIP : MT 568,01;
- Résistance ext. crit. : 6 Ω ;
- période : 0,4 s;
- sensibilité 462 $\cdot 10^{-9}$ A/mm à 1 m;
- résistance interne : 4,7 Ω .

Pour des durées suffisamment prolongées, les mesures peuvent s'effectuer manuellement.

(1) Ce galvanomètre nous a été aimablement prêté par M. ACLOQUE, de la Société Saint-Gobain; il avait d'ailleurs servi à des expériences analogues sur les touchaus.

Pour des mesures de faible durée (30 s par exemple) nous avons dû utiliser un dispositif d'enregistrement photographique. Dans ce but, nous avons adapté le galvanomètre sur la cage photographique d'un dilatomètre Chevenard (*fig. 36*). La base de temps était fournie par un disque échancré entraîné par un moteur synchrone Lip, l'intervalle entre deux éclairs lumineux étant de 0,885 s.

A la distance d'enregistrement (environ 1 m), la sensibilité était telle que 1 mV correspondait à environ 200 mm sur le verre dépoli.



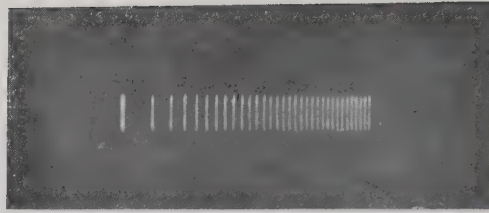
Fig. 36. — Ensemble

Un dispositif synchronisateur de l'éclairage de la base de temps et du contact métal-isolant était indispensable pour connaître la température de ce dernier à l'instant du contact; cette synchronisation a été assurée par l'éprouvette elle-même dont la face d'étude assurait, une fois déposée sur le touchau, un contact électrique par le rapprochement de deux lames de clinquant de cuivre (*fig. 31*). La fente du disque tournant étant disposée près de la position d'éclairage, le premier éclair d'enregistrement se produit pratiquement dès le contact. Il est toutefois nécessaire que le moteur ait une inertie aussi faible que possible. Malgré cela, l'inertie due au démarrage est la cause d'un premier top lumineux plus prolongé que les autres et qui se traduit par un trait plus accentué.

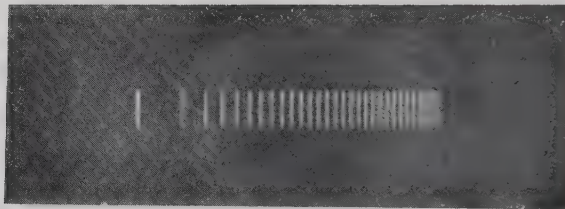
III. — EXPÉRIENCES ET RÉSULTATS

1. — Conduite de l'expérience.

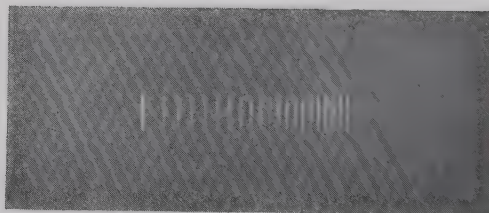
Les surfaces du touchau et de sa garde étant préalablement huilées, on dispose sur les faces supérieures une plaque isolante (plaque de liège par exemple). On chauffe le cylindre support jusqu'à ce que la température de 50° C environ soit atteinte; on remplace ensuite la plaque isolante par le bloc chauffant, de façon à gagner encore quelques degrés. Pendant ce temps, l'éprouvette est montée sur son support isolant et, par un contact prolongé avec une masse métallique importante, on la porte à une tempé-



Plexiglas

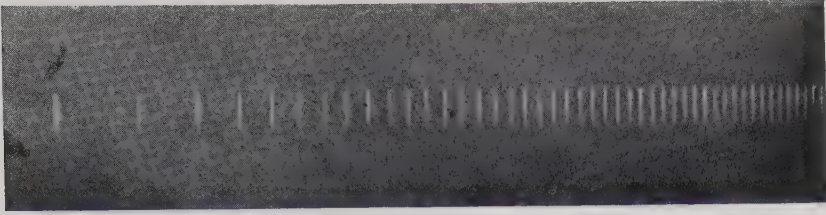


Mélamine

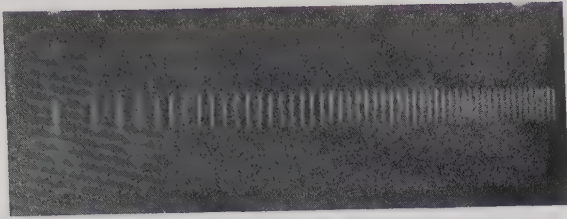


Liège + résine

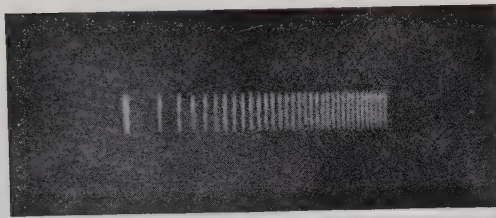
Fig. 37. — Deuxième touchau



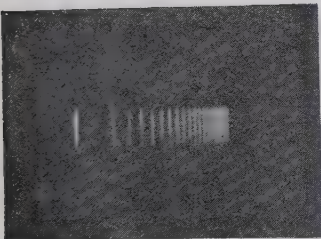
Plexiglas



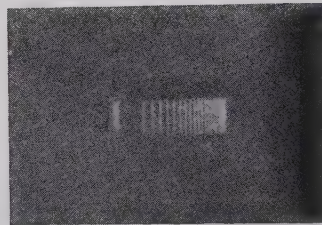
Contre-plaqué



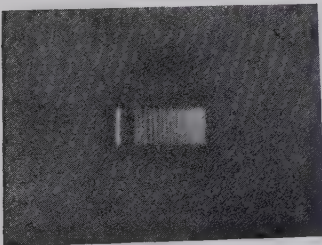
Isorel



Liège aggloméré



Balsa



Klegecell



Polystyrène

Fig. 37 bis. — Troisième touchau

rature connue que l'on mesure au moyen d'un potentiomètre. On règle ensuite la tension d'opposition de façon à ramener le spot du galvanomètre au zéro.

Lorsque l'équilibre de température du touchau et de sa garde est atteint, on enlève le bloc chauffant et l'on dépose rapidement l'éprouvette à étudier (temps zéro). Le contact synchronisateur déclenche aussitôt la base du temps. L'enregistrement du refroidissement s'effectue; on l'arrête au bout du temps voulu.

Nous avons reproduit (*fig. 37 et 37 bis*) les enregistrements correspondants à quelques corps diversement isolants.

On a ainsi la loi $\frac{T}{T_0} = f\left(\frac{1}{2} \text{Log}_{10} t\right)$; c'est la courbe expérimentale. On cherche ensuite à réaliser la superposition avec la courbe théorique; si la superposition est impossible, c'est que l'expérience a été mal conduite :

— soit que le refroidissement ait été trop lent, ce qui, le plus souvent est dû à un mauvais contact;

— soit que le refroidissement ait été trop rapide, ce qui est dû aux déperditions parasites;

— soit, enfin, qu'il y ait eu interférence de ces deux phénomènes : le refroidissement trop lent au début est trop rapide à la fin.

Il faut bien reconnaître que se placer exactement dans les conditions du refroidissement théorique n'est pas chose facile; il est plus facile de se borner, comme le faisait M. ACLOQUE, à comparer entre elles les courbes de refroidissement, lesquelles dépendent non seulement de la géométrie du touchau et de sa garde, mais encore du calorifuge et des déperditions parasites. Dans ce cas, seules les mesures relatives sont possibles et cela est suffisant dans la plupart des cas. Mais il faut alors être absolument certain du contact.

2. — Résultats.

Les mesures ont tout d'abord porté sur des matériaux isolants suivants :

— le *plexiglas ordinaire* :

(carré de dimensions 130 × 130 mm et de 15 mm d'épaisseur);

— le *papier mélamine* :

(cylindre de 110 mm de diamètre et de 20 mm d'épaisseur);

— le *liège aggloméré dans une résine polyester* :

(mêmes dimensions).

Étant donné le caractère fortement isolant de ces matériaux, le touchau de mesure devait, pour que son refroidissement soit aisément mesurable, avoir une faible capacité calorifique γ par unité de surface d'où la nécessité d'utiliser le deuxième touchau.

Les refroidissements ont été enregistrés et ont conduit à des tableaux analogues au tableau X et à des courbes analogues aux courbes XVI, *figure 38*. Le mauvais contact nous a obligé à utiliser pour le dépouillement les courbes inverses. Les résultats sont consignés dans le tableau final (tabl. XVI).

Les matériaux plus isolants nécessitaient un touchau de capacité calorifique par unité de surface plus faible encore d'où l'obligation d'utiliser le troisième touchau.

Avec ce dernier, nous avons expérimenté :

- le *plexiglas ordinaire* :
(même éprouvette);
- le *contre-plaqué d'aviation* :
(carré de dimensions 200×200 mm et de 20 mm d'épaisseur);
- le *liège aggloméré au brai* :
(parallépipède de dimensions $150 \times 150 \times 100$ mm).

Les refroidissements ont été également enregistrés et ont conduit aux tableaux XI, XII, XIII et aux courbes XVII, XVIII et XIX représentées *figures* 39, 40, 41.

Avec le même touchau, nous avons également expérimenté

- l'*isorel* :
(carré de dimensions 150×150 mm et de 20 mm d'épaisseur).

Le refroidissement a également été enregistré, mais par suite du *très* mauvais contact, nous avons dû appliquer notre méthode de correction :

Sur la neuvième ligne du tableau des valeurs (tabl. XIV) nous avons calculé l'écart δ entre les milieux de deux traits consécutifs de l'enregistrement; c'est une grandeur que l'on peut, en première approximation, prendre comme étant proportionnelle à la dérivée par rapport au temps de $\frac{T}{T_0}$.

Nous avons établi le tableau des valeurs :

$$0,8 \cdot 10^{-2} \delta, \quad 0,9 \cdot 10^{-2} \delta, \quad 1,0 \cdot 10^{-2} \delta, \quad 1,1 \cdot 10^{-2} \delta, \quad 1,2 \cdot 10^{-2} \delta$$

et tracé le réseau de courbes obtenu en retranchant de chaque ordonnée de la courbe expérimentale une grandeur proportionnelle à ces valeurs (*fig.* 42, courbes XX).

La courbe correspondant à $1,0 \cdot 10^{-2} \delta$ est celle qui se superpose le mieux à la courbe théorique.

Avec le même touchau nous avons également expérimenté :

- le *Balsa* :
(parallépipède de dimensions $150 \times 150 \times 100$ mm);
- le *Klegecell* :
(carré de dimensions 150×150 mm et de 30 mm d'épaisseur);
- le *Polystyrène* :
(mêmes dimensions).

Avec ces nouveaux matériaux, le refroidissement s'effectuant très lentement, l'enregistrement qui avait surtout pour but de mettre en évidence la bouffée de conduction des premiers instants, ne s'imposait plus.

Nous l'avons pourtant tenté (*fig.* 37 *bis*), mais le tracé des courbes exigeant une durée d'expérience plus longue, nous avons repris les mesures en supprimant l'enregistrement et en poursuivant l'expérience pendant une minute et demie.

Les résultats obtenus sur le balsa sont traduits sur les tableau XV et courbe XXI, *figure* 43. Le tableau XVI résume tous les résultats de nos mesures.

TABLEAU X

PLEXIGLAS

Deuxième touchau ($\gamma = 1,030$), 1 division = $0^{\circ} 0808$

Température initiale du touchau ... $56^{\circ} 8$

Température initiale de l'éprouvette. $24^{\circ} 8$

Tops	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
Temps	Unité de temps : 0,885 s																			
$\frac{1}{2} \text{ Log } t$	$-\infty$	-0,027	0,124	0,212	0,274	0,322	0,362	0,396	0,426	0,451	0,473	0,513	0,546	0,575	0,601	0,623	0,644	0,663	0,681	0,696
Divisions	0	3,9	6,1	8,0	9,3	10,7	11,9	13,0	14,0	15,0	16,0	17,9	19,5	21,0	22,3	23,8	25,0	26,3	27,5	28,7
T_0	32,0	22,0	32,0	32,0	32,0	32,0	32,0	32,0	32,0	32,0	32,0	32,0	32,0	32,0	32,0	32,0	32,0	32,0	32,0	32,0
ΔT	0,00	0,32	0,49	0,65	0,75	0,87	0,96	1,05	1,13	1,21	1,29	1,45	1,58	1,70	1,80	1,92	2,02	2,13	2,22	2,32
$T_0 - \Delta T$	32,0	31,68	31,51	31,35	31,25	31,13	31,04	30,95	30,87	30,79	30,71	30,55	30,42	30,30	30,20	30,08	29,98	29,87	29,78	29,68
$\frac{T}{T_0}$	1,000	0,991	0,985	0,980	0,976	0,974	0,971	0,968	0,965	0,963	0,960	0,955	0,952	0,947	0,944	0,941	0,937	0,934	0,930	0,929
$\frac{T_0}{T}$	1,000	1,010	1,014	1,020	1,024	1,026	1,029	1,032	1,037	1,039	1,042	1,047	1,050	1,054	1,059	1,063	1,068	1,071	1,074	1,077

TABEAU XI

PLEXIGLAS

Troisième touchau ($\gamma = 0,3703$), 1 division = $0^{\circ}0742$
 Température initiale du touchau..... $51^{\circ}5$
 Température initiale de l'éprouvette .. $21^{\circ}3$

Tops	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20
Temps	Unité de temps : 0,885 s															
$\frac{1}{2} \text{ Log } t$	$-\infty$	-0,027	0,124	0,212	0,274	0,322	0,362	0,396	0,426	0,451	0,473	0,513	0,546	0,575	0,601	0,623
Divisions	0	10,8	18,0	23,1	27,3	30,8	34,0	37,0	39,7	42,1	44,7	49,2	53,7	57,6	61,2	64,8
T_0	30,2	30,2	30,2	30,2	30,2	30,2	30,2	30,2	30,2	30,2	30,2	30,2	30,2	30,2	30,2	30,2
ΔT	0,00	0,80	1,34	1,71	2,12	2,28	2,52	2,75	2,95	3,12	3,32	3,65	3,98	4,28	4,55	4,81
$T_0 - \Delta T$	30,20	29,40	28,86	28,49	28,08	27,92	27,68	27,45	27,25	27,08	26,88	26,55	26,22	25,92	25,65	25,39
$\frac{T}{T_0}$	1,000	0,973	0,957	0,944	0,931	0,924	0,917	0,909	0,903	0,897	0,890	0,878	0,868	0,856	0,850	0,841
$\frac{T_0}{T}$	1,000	1,028	1,047	1,060	1,073	1,082	1,091	1,100	1,109	1,115	1,123	1,139	1,150	1,167	1,178	1,189

TABEAU XII

CONTRE-PLAQUÉ

Troisième touchau ($\gamma = 0,3703$), 1 division = 0°0742
Température initiale du touchau..... 57°5
Température initiale de l'éprouvette ... 21°3

Tops	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
Temps	Unité de temps : 0,885 s																				
$\frac{1}{2} \text{ Log } t$	— ∞	-0,027	0,123	0,212	0,274	0,322	0,362	0,396	0,425	0,451	0,473	0,512	0,546	0,575	0,601	0,623	0,644	0,663	0,681	0,696	0,712
Divisions	0	5,0	8,7	11,0	13,3	15,1	17,0	18,9	20,3	22,0	23,7	26,8	29,5	32,1	34,8	37,1	39,6	41,8	44,0	46,0	47,9
T_0	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2
ΔT	0,00	0,37	0,64	0,82	0,99	1,12	1,26	1,40	1,51	1,63	1,76	1,99	2,19	2,38	2,58	2,75	2,94	3,10	3,26	3,41	3,55
$T_0 - \Delta T$	36,20	35,83	35,56	35,38	35,21	35,08	34,94	34,80	34,69	34,57	34,44	34,21	34,01	33,82	33,62	33,45	33,26	33,10	32,94	32,79	32,65
$\frac{T}{T_0}$	1,000	0,991	0,982	0,977	0,974	0,970	0,965	0,962	0,959	0,954	0,952	0,945	0,940	0,936	0,930	0,925	0,920	0,915	0,911	0,908	0,903
$\frac{T_0}{T}$	1,000	1,008	1,017	1,023	1,028	1,031	1,038	1,040	1,043	1,048	1,051	1,058	1,062	1,069	1,077	1,081	1,088	1,092	1,098	1,103	1,108

TABEAU XIII

LIÈGE AGGLOMÉRÉ

Troisième touchau ($\gamma = 0,3703$), 1 division = $0^{\circ}0765$

Température initiale du touchau... $49^{\circ}6$

Température initiale de l'éprouvette $22^{\circ}3$

Tops	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Temps	Unité de temps : $3 \times 0,885$ s												
$\frac{1}{2} \text{ Log } t$	$-\infty$	0,212	0,366	0,451	0,513	0,566	0,601	0,635	0,663	0,689	0,712	0,733	0,751
Divisions	0	4,8	6,5	8,1	9,5	10,6	11,8	12,8	13,4	14,0	14,5	15,0	15,5
T_0	27,3	27,3	27,3	27,3	27,3	27,3	27,3	27,3	27,3	27,3	27,3	27,3	27,3
ΔT	0,00	0,37	0,50	0,62	0,73	0,81	0,90	0,98	1,03	1,07	1,09	1,15	1,19
$T_0 - \Delta T$	27,30	26,93	26,80	26,68	26,57	26,49	26,40	26,32	26,27	26,23	26,21	26,15	26,11
$\frac{T}{T_0}$	1,000	0,986	0,982	0,978	0,972	0,971	0,967	0,964	0,962	0,961	0,959	0,957	0,956
$\frac{T_0}{T}$	1,000	1,013	1,019	1,023	1,028	1,030	1,034	1,038	1,039	1,040	1,042	1,043	1,047

TABLEAU

ISO

Troisième touchau ($\gamma = 0,3703$),
Température initiale
Température initiale

Tops	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Temps	Unité de temps : 3 = 0.885 s								
$\frac{1}{2} \text{Log} t$	— ∞	0,212	0,366	0,451	0,513	0,566	0,601	0,635	0,663
Divisions	0	2,8	4,8	6,0	7,8	9,2	10,8	12,1	13,4
T_0	27,9	27,9	27,9	27,9	27,9	27,9	27,9	27,9	27,9
ΔT	0,00	0,21	0,36	0,46	0,59	0,70	0,83	0,93	1,02
$T_0 - \Delta T$	27,90	27,69	27,54	27,44	27,31	27,20	27,07	26,97	26,88
$\frac{T}{T_0}$	1,000	0,992	0,987	0,984	0,980	0,975	0,971	0,967	0,965
δ		2,40	1,60	1,50	1,60	1,50	1,45	1,30	1,35
$0,8 \cdot 10^{-2} \delta$		0,0192	0,0128	0,0120	0,0128	0,0120	0,0116	0,0104	0,0108
$0,9 \cdot 10^{-2} \delta$		0,0216	0,0144	0,0135	0,0144	0,0135	0,0130	0,0117	0,0122
$1,0 \cdot 10^{-2} \delta$		0,0240	0,0160	0,0150	0,0160	0,0150	0,0145	0,0130	0,0135
$1,1 \cdot 10^{-2} \delta$		0,0264	0,0176	0,0165	0,0176	0,0165	0,0160	0,0143	0,0148
$1,2 \cdot 10^{-2} \delta$		0,0288	0,0192	0,0180	0,0192	0,0180	0,0174	0,0156	0,0162

XIV

REL

1 division = 0° 0765
du touchau..... 50° 4
de l'éprouvette ... 22° 5

[illegible]

TABLEAU XV

BALSA

Troisième touchau ($\gamma = 0,3703$), 1 division = $0^{\circ}0765$
 Température initiale du touchau..... $55^{\circ}8$
 Température initiale de l'éprouvette ... $21^{\circ}7$

Tops	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Temps	Unité de temps : 10 s.									
$\frac{1}{2} \text{ Log } t$	— ∞	0,500	0,650	0,739	0,801	0,850	0,889	0,922	0,952	0,978
Divisions	0	5,9	10,5	14,4	17,0	19,0	19,6	20,3	22,2	23,6
T_0	34,1	34,1	34,1	34,1	34,1	34,1	34,1	34,1	34,1	34,1
ΔT	0,00	0,45	0,80	1,10	1,30	1,45	1,50	1,55	1,70	1,80
$T_0 - \Delta T$	34,10	33,65	33,20	33,00	32,80	32,65	32,60	32,45	32,40	32,30
$\frac{T}{T_0}$	1,000	0,981	0,973	0,967	0,963	0,959	0,956	0,952	0,950	0,947

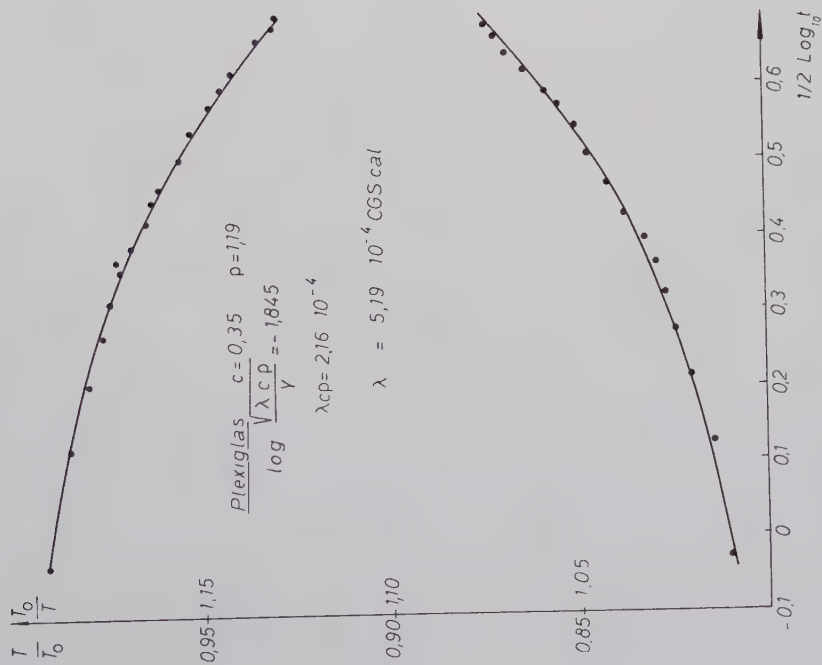


Fig. 38. — Courbes XVI. — Refroidissement du deuxième touchau après contact avec une éprouvette de plexiglas (tab. X)

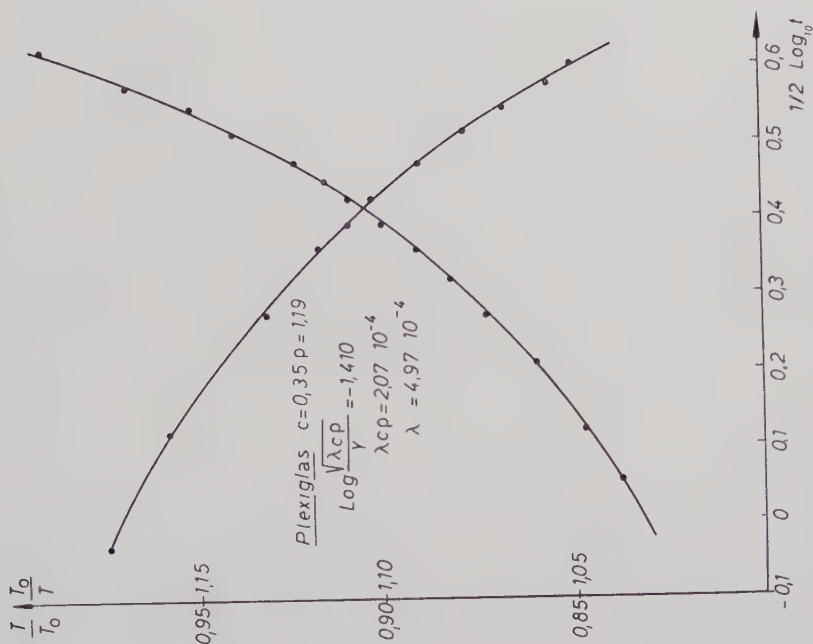


Fig. 39. — Courbes XVII. — Refroidissement du troisième touchau après contact avec une éprouvette de plexiglas (tab. XI)

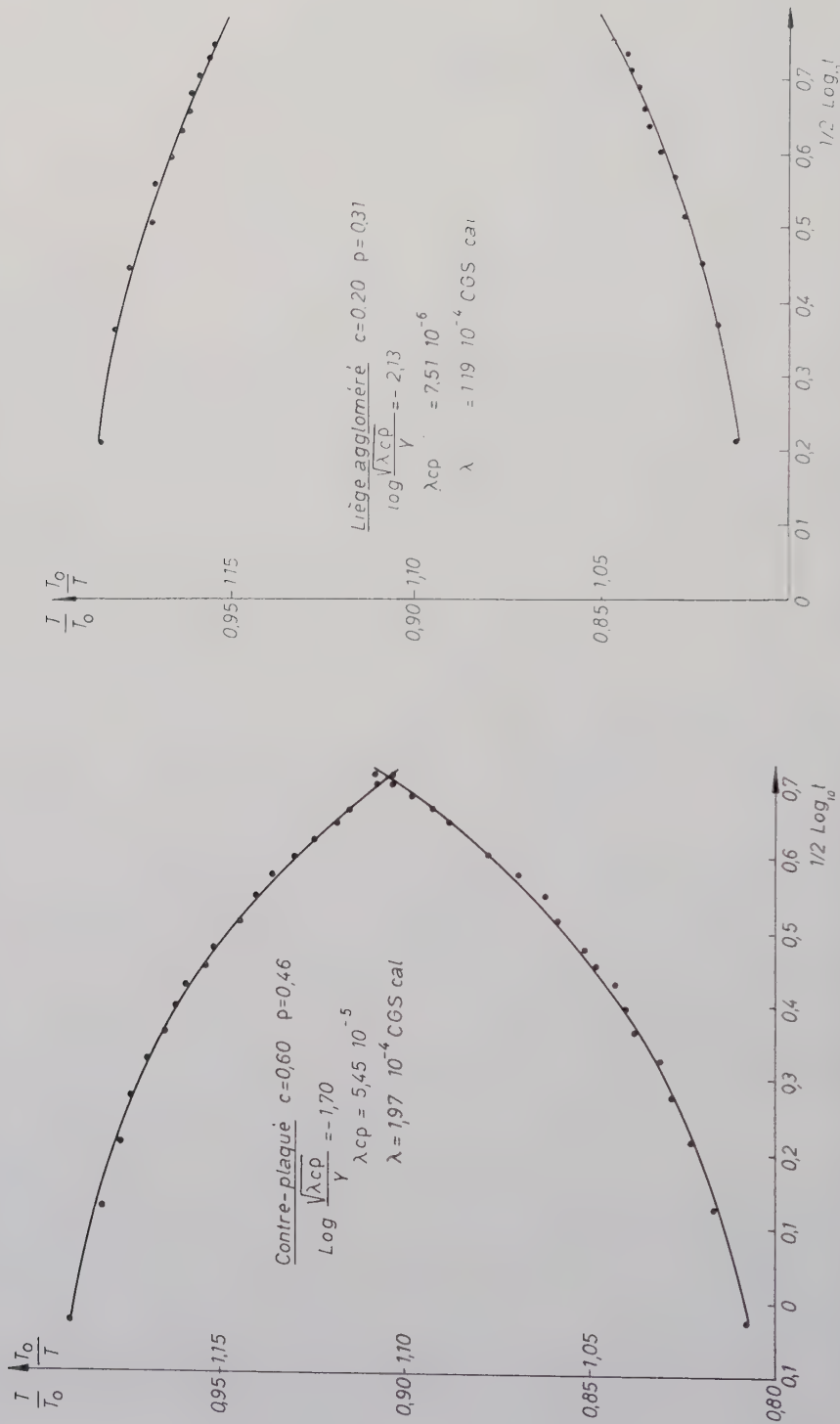


Fig. 41. — Courbes XIX. — Refroidissement du troisième touchau après contact avec une éprouvette de liège aggloméré (tab. XIII)

Fig. 40. — Courbes XVIII. — Refroidissement du troisième touchau après contact avec une éprouvette de contre-plaqué (tab. XI)

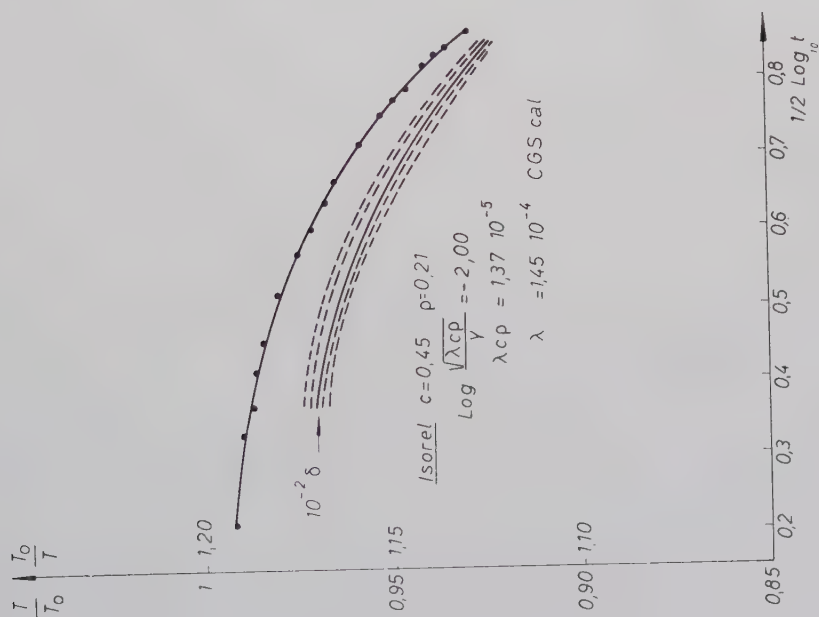


Fig. 42. — Courbes XX. — Refroidissement du troisième touchau après contact avec une éprouvette d'isorel (tab. XIV)

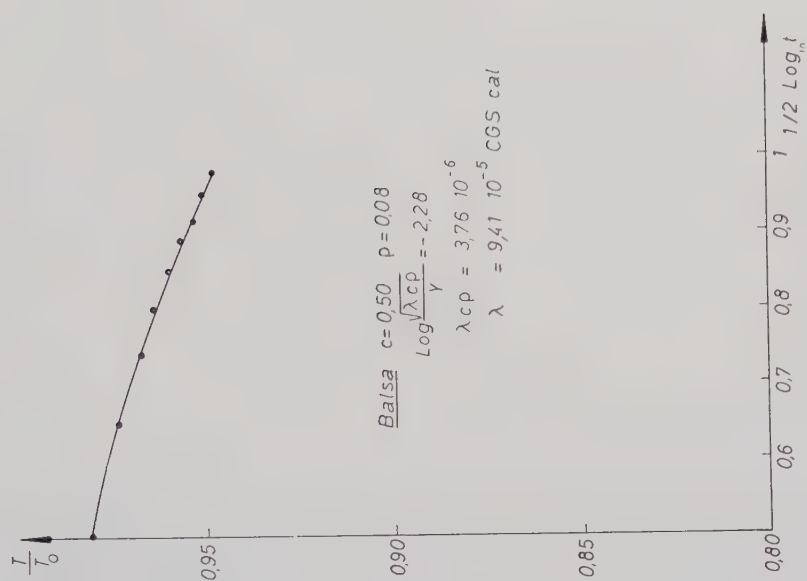


Fig. 43. — Courbes XXI. — Refroidissement du troisième touchau après contact avec une éprouvette de balsa (tab. XV)

TABLEAU XVI

Matériau	ρ	c	$\text{Log } \frac{\sqrt{\lambda c \rho}}{\gamma}$	$\lambda c \rho$	λ
Plexiglas ordinaire (2 ^e Touchau)	1,19	0,35	— 1,845	$2,16 \cdot 10^{-4}$	$5,19 \cdot 10^{-4}$
Papier mélamine (2 ^e Touchau)	1,48	0,40	— 1,710	$4,03 \cdot 10^{-4}$	$6,82 \cdot 10^{-4}$
Résine polyester + poudre liège (2 ^e Touchau)	0,95	0,32	— 1,820	$2,42 \cdot 10^{-4}$	$7,97 \cdot 10^{-4}$
Plexiglas ordinaire (3 ^e Touchau)	1,19	0,35	— 1,410	$2,07 \cdot 10^{-4}$	$4,97 \cdot 10^{-4}$
Contre-plaqué aviation (3 ^e Touchau)	0,46	0,60	— 1,700	$5,45 \cdot 10^{-5}$	$1,97 \cdot 10^{-4}$
Liège aggloméré au brai (3 ^e Touchau)	0,31	0,20	— 2,130	$7,51 \cdot 10^{-6}$	$1,19 \cdot 10^{-4}$
Isorel (3 ^e Touchau)	0,21	0,45	— 2,000	$1,37 \cdot 10^{-5}$	$1,45 \cdot 10^{-4}$
Balsa (3 ^e Touchau)	0,080	0,50	— 2,280	$3,76 \cdot 10^{-6}$	$9,41 \cdot 10^{-5}$
Klegecell (3 ^e Touchau)	0,085	0,40	— 2,310	$3,27 \cdot 10^{-6}$	$9,63 \cdot 10^{-5}$
Polystyrène (3 ^e Touchau)	0,080	0,40	— 2,340	$2,85 \cdot 10^{-6}$	$9,00 \cdot 10^{-5}$

3. — Contrôle des résultats.

Nous avons pu, grâce aux indications fournies par les tables, contrôler certains de nos résultats et, par là même, le bien-fondé de la méthode.

On trouve en effet les valeurs suivantes :

plexiglas ordinaire	$\lambda = 4 \text{ à } 6 \cdot 10^{-4}$
— contre-plaqué sec ($\rho = 0,45$).....	$\lambda = 2,4 \cdot 10^{-4}$
— liège aggloméré.....	$\lambda = 1,0 \cdot 10^{-4}$
— isorel isolant ($\rho = 0,20$).....	$\lambda = 1,1 \cdot 10^{-4}$
— balsa ($\rho = 0,075$).....	$\lambda = 0,98 \cdot 10^{-4}$

Sans chercher une précision illusoire, on voit que la méthode du touchau peut fort bien s'appliquer à des corps fortement isolants.

CONCLUSION

La méthode du touchau est une méthode de choix qui s'impose :

- lorsque les éprouvettes à étudier ont des dimensions relativement grandes;
- lorsqu'il est difficile de disposer des couples thermo-électriques à des endroits connus de l'éprouvette.

Elle n'est en revanche pas applicable lorsqu'il s'agit de matériaux assez conducteurs ou de faible épaisseur.

Le fait qu'on puisse tenir compte de la résistance de contact est un avantage considérable par rapport aux autres méthodes de régime transitoire. Mais les difficultés expérimentales, malgré tout assez grandes lorsqu'il s'agit de corps très isolants, diminuent fortement les possibilités d'extrapolation pour des températures supérieures à celles où nous avons effectué nos expériences.

TROISIÈME PARTIE

LES MÉTHODES TRANSITOIRES APPLIQUÉES
AUX REVÊTEMENTS PROTECTEURS

PROBLÈMES NOUVEAUX

Au premier abord, rien ne s'oppose à l'extrapolation des méthodes précédentes de mesure de la conductivité thermique des isolants à des températures élevées : Il suffit, tout au moins en principe, de placer l'ensemble (éprouvette et prises de température) dans une enceinte à température constante, et

— soit de chauffer le corps légèrement au-dessus de cette température et d'observer son refroidissement (méthode du refroidissement);

— soit de créer sur l'une des faces un signal et d'observer l'apparition de celui-ci sur l'autre face (méthode du signal).

Mais dans le premier cas, on se heurte, tout comme dans le cas des conducteurs, à la difficulté suivante, à savoir la perturbation de la température de l'enceinte du fait de l'introduction dans celle-ci d'un corps plus chaud d'où la nécessité de vastes dimensions. En outre, dans le second cas, il s'avère qu'un contact et particulièrement un contact sur une grande surface devient à chaud souvent intermittent et incertain et à moins de l'éliminer ou d'en tenir compte, la méthode devient alors douteuse.

Pour ces raisons, les tentatives d'extrapolation des méthodes transitoires ont jusqu'à présent été fort peu nombreuses.

Nous ne citerons pour mémoire que celle de CODEGONE [82] qui préconisait la méthode du refroidissement et l'appliquait à des sphères. Encore cette méthode n'a-t-elle pas été très développée.

En outre, il faut bien reconnaître que, du fait de l'évolution de la technique, on se trouve de plus en plus devant des corps composites (mousses, stratifiés, etc.), de sorte qu'il est illusoire de chercher à déterminer au moyen d'une des méthodes précédentes la conductivité thermique de chacun des constituants de l'ensemble. Il devient donc nécessaire de caractériser le matériau par un paramètre discriminatif autre que la conductivité, la diffusivité ou le coefficient d'arrachement, facteurs qui nécessitent avant tout une parfaite homogénéité. Aussi avons-nous adopté une nouvelle grandeur jusqu'à présent peu employée en Thermocinétique : la constante de temps, qui se déduit d'une courbe d'échauffement tout comme la constante de temps d'un condensateur se déduit de sa courbe de charge.

Le nouveau problème qui nous avait été posé était le suivant : il s'agissait d'étudier l'échauffement d'une plaque de duralumin protégée par un revêtement épais lorsque la face libre de ce revêtement était portée instantanément à une température élevée de l'ordre de 300 - 350° C. Cette expérience correspondait sensiblement au programme de température auquel était soumise la paroi externe d'un avion lors d'une violente accélération. Il s'agissait également de déterminer le temps au bout duquel la température du métal représentant en quelque sorte la température des parties métalliques de l'avion risquait de devenir catastrophique, autrement dit le temps durant lequel l'appareil pouvait maintenir sans risque son nouveau régime.

Au premier abord, il pouvait paraître osé d'appliquer intégralement les principes de la Thermocinétique c'est-à-dire, avant tout, de supposer constantes les grandeurs classiques sur un aussi grand intervalle de température, mais nous montrerons dans la suite que cela est parfaitement justifié, tout au moins en ce qui concerne le coefficient d'échange.

CHAPITRE II

ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

I. — GÉNÉRALITÉS

On sait que la méthode de FOURIER, laquelle consiste à chercher un développement de la loi de la température sous forme d'une somme de solutions dites simples, permet de résoudre des problèmes de transfert extrêmement variés.

Mais les calculs, quoique élémentaires, sont souvent fastidieux dès l'instant où l'on ne se borne plus à des solutions approchées. C'est le cas, en particulier, si l'on veut étudier l'évolution de la température pour des temps courts, c'est-à-dire, dans le cas actuel, pour les instants qui suivent la brusque élévation de température de la face libre du revêtement. Mais si, par contre, on se borne à suivre l'évolution du phénomène pour des temps relativement longs, les calculs se simplifient considérablement et l'on adopte souvent la solution simple dite fondamentale, laquelle donne alors une image assez fidèle de l'évolution de la température.

Précisons maintenant ce qu'il faut entendre par temps courts et temps longs. Il nous faut pour cela définir ce paramètre particulier que nous avons appelé constante de temps du phénomène thermique. Il s'introduit tout naturellement si l'on cherche pour l'équation de transfert relative à l'isolant, des solutions de la forme :

$$T = \Phi(x) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

expression dans laquelle Φ est une fonction indépendante du temps appelée communément fonction d'espace, et τ une constante, dépendant du matériau et des conditions aux limites, qui est précisément la constante de temps.

C'est précisément par ce paramètre τ que nous caractériserons l'ensemble revêtement-conducteur.

On aurait pu d'ailleurs choisir un tout autre paramètre discriminatif, par exemple le temps durant lequel se manifeste l'effet d'écran, c'est-à-dire pendant lequel la température du conducteur reste sensiblement constante. Pratiquement, ce temps pourrait être approximativement défini par l'instant où le rayon de courbure de la courbe représentative de l'élévation de la température de ce conducteur en fonction du temps, serait

minimal. Mais le calcul théorique serait des plus pénibles, le développement de FOURIER devant comprendre un nombre important de termes.

Il y a naturellement autant de constantes de temps que de solutions simples. Celle qui correspond à la première de ces solutions simples est appelée constante de temps fondamentale. On démontre [83], et nous le vérifierons, que les constantes de temps successives décroissent rapidement.

Ceci étant, cherchons, dans le cas actuel, à évaluer cette constante de temps fondamentale.

II. — REVÊTEMENT UNIQUE

Nous sommes obligés de styliser le problème en étudiant l'ensemble formé par un disque isolant d'épaisseur l en contact parfait avec un disque conducteur d'épaisseur l' , la surface libre supérieure de l'isolant (fig. 44) étant maintenue tout le long de l'expé-

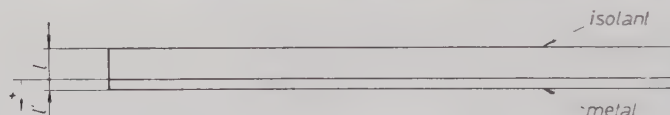


Fig. 44. — Schéma d'étude

rience à une température constante, tandis que la face inférieure du conducteur reste en contact avec l'air ambiant.

Nous supposons le problème à une dimension, ce qui suppose un rapport d'au moins 10 entre le diamètre et l'épaisseur de l'isolant. Nous désignerons par :

- λ la conductivité thermique du revêtement;
- c sa chaleur spécifique;
- ρ sa masse spécifique;
- l son épaisseur,

grandeurs que nous supposons indépendantes de la température, et par $\lambda' c' \rho' l'$ les grandeurs correspondantes relatives au conducteur.

Enfin, nous désignerons par h le coefficient d'échange superficiel sur la face inférieure du conducteur, coefficient que nous supposons également indépendant de la température, quitte à vérifier plus tard la légitimité de cette hypothèse.

L'origine des températures est naturellement la température ambiante; l'origine des abscisses étant choisie arbitrairement à la jonction isolant-conducteur, le sens positif est compté vers le conducteur.

Nous ferons, bien entendu, la transposition classique qui consiste à étudier le problème d'un mur refroidi par contact parfait sur sa face d'entrée et refroidi également, mais avec un coefficient de passage fini sur l'autre face.

Ainsi que nous l'avons déjà dit, les solutions simples sont de la forme :

$$T = \Phi(x) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

la constante de temps τ étant la même dans l'isolant et dans le conducteur.

La fonction Φ d'espace a pour expression :

— dans l'isolant :

$$\Phi_i = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \quad \text{avec} \quad \alpha^2 = \frac{c \rho}{\lambda \tau};$$

— dans le conducteur :

$$\Phi_c = A' \cos \alpha' x + B' \sin \alpha' x \quad \text{avec} \quad \alpha'^2 = \frac{c' \rho'}{\lambda' \tau}.$$

Écrivons maintenant les conditions aux limites et les équations de continuité :

— pour $x = l$, on doit avoir :

$$\Phi(l) = 0,$$

$$\text{c'est-à-dire :} \quad A \cos \alpha l + B \sin \alpha l = 0; \quad (1)$$

— pour $x = 0$, on doit avoir à la fois l'égalité des températures et des flux :

$$\Phi_i(0) = \Phi_c(0) \quad \text{et} \quad -\lambda \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \right)_0 = -\lambda' \left(\frac{\partial \Phi_c}{\partial x} \right)_0,$$

$$\text{c'est-à-dire :} \quad A = A' \quad (2)$$

$$\text{et :} \quad B \alpha \lambda = B' \alpha' \lambda'; \quad (3)$$

— pour $x = l'$, l'équation aux limites s'écrit :

$$-\lambda' \left(\frac{\partial \Phi_c}{\partial x} \right)_{l'} = h T_c(l'),$$

c'est-à-dire :

$$-\alpha' \lambda' (-A' \sin \alpha' l' + B' \cos \alpha' l') = h (A' \cos \alpha' l' + B' \sin \alpha' l'). \quad (4)$$

Les égalités (1), (2), (3) donnent :

$$B' = B \frac{\alpha \lambda}{\alpha' \lambda'} = -\frac{\lambda \alpha}{\lambda' \alpha'} \frac{\cos \alpha l}{\sin \alpha l} A$$

et, en reportant dans (4) après avoir posé :

$$\alpha l = u, \quad \alpha' l' = u',$$

$$\frac{\lambda u'}{l'} \left[\sin u' + \frac{\lambda l' u}{\lambda' l u'} \frac{\cos u}{\sin u} \cos u' \right] = h \left[\cos u' - \frac{\lambda l' u}{\lambda' l u'} \frac{\cos u}{\sin u} \sin u' \right].$$

Comme, d'autre part, nous avons :

$$\tau = \frac{c \rho}{\lambda \alpha^2} = \frac{c' \rho'}{\lambda' \alpha'^2},$$

cela entraîne :

$$\frac{l^2 c \rho}{\lambda u^2} = \frac{l'^2 c' \rho'}{\lambda' u'^2},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{u'^2}{u^2} = \frac{l'^2 c' \rho'}{l^2 c \rho} \cdot \frac{\lambda}{\lambda'}.$$

Posons : $u' = Nu$ avec $N^2 = \frac{l'^2 c' \rho' \lambda}{l^2 c \rho \lambda'}$

u est solution de l'équation transcendante suivante :

$$\frac{\lambda' Nu}{l'} \left[\sin Nu + \frac{\lambda l'}{N \lambda' l} \frac{\cos u}{\sin u} \cos Nu \right] = h \left[\cos Nu - \frac{\lambda l'}{N \lambda' l} \frac{\cos u}{\sin u} \sin Nu \right]. \quad (5)$$

1. — Revêtement épais.

Supposons que l'épaisseur de l'isolant choisi (liège aggloméré) soit de 5 mm et celle du conducteur de 1,5 mm.

On a alors :

$$\begin{aligned} c &= 0,22, & \rho &= 0,3, & \lambda &= 0,0001, \\ c' &= 0,20, & \rho' &= 2,8, & \lambda' &= 0,3. \end{aligned}$$

d'où : $\frac{l^2 c \rho}{\lambda} = 165$ et $\frac{l'^2 c' \rho'}{\lambda'} = 0,042$

et : $N^2 = \frac{1}{3930}$,

c'est-à-dire : $N = \frac{1}{62,69}$.

La valeur du coefficient h est mal connue du fait de la température élevée, de la nature mal définie de la surface du métal et de sa position qui contrarie le refroidissement. Aussi choisirons-nous la valeur faible suivante $1,8 \cdot 10^{-4}$, dont nous prouverons plus tard l'exactitude.

Portons ces valeurs numériques dans (5) et remarquons que si u_1 , est la première solution correspondant à la constante de temps fondamentale, Nu_1 est certainement petit, de sorte que l'on peut certainement écrire :

$$\sin Nu_1 \neq Nu_1, \quad \cos Nu_1 \neq 1.$$

Remarquons également que $\frac{\lambda}{l}$ est grand par rapport à $h \frac{\lambda}{l} \frac{l'}{\lambda'}$, de sorte que l'équation transcendante (5) se réduit à :

$$\frac{\lambda' N^2 u_1^2}{l'} + \frac{\lambda}{l} u_1 \cotg u_1 = h. \quad (6)$$

Avec le sens positif choisi, l'équation aux valeurs numériques est :

$$u_1^2 - 0,393 u_1 \cotg u_1 - 0,353 = 0.$$

La résolution, effectuée par approximations successives, conduit à :

$$u_1 \neq 0,815 \quad \text{d'où} \quad u_1^2 \neq 0,663,$$

d'où la constante de temps fondamentale :

$$\tau_1 = \frac{c\rho l^2}{\lambda u^2} = 249 \text{ s}$$

Comme la seconde solution u_2 de l'équation (5) est certainement du même ordre de grandeur que la première, nous pouvons encore tenir pour très voisines de la vérité les relations :

$$\sin Nu_2 \neq Nu_2 \quad \text{et} \quad \cos Nu_2 \neq 1$$

de sorte que u_2 est encore solution de (6).

On trouve par la même méthode :

$$u_2 = 3,265,$$

d'où la seconde constante de temps :

$$\tau_2 = 15,5 \text{ s.}$$

Les exponentielles $e^{-\frac{t}{\tau_1}}$ et $e^{-\frac{t}{\tau_2}}$ valent respectivement au bout de 100 s : 0,670 et 0,00160. La seconde est donc négligeable devant la première.

Ce temps de 100 s constitue précisément la limite, approchée il est vrai, entre ce que nous avons appelé temps courts et temps longs. Pour simplifier les calculs de dépouillement, nous avons ultérieurement adopté 120 s comme temps limite, ce qui correspond exactement à 2 mn.

Si l'on veut maintenant l'équation représentant intégralement le phénomène, il nous faut chercher la distribution stationnaire de température. Nous pouvons pour cela admettre que la répartition se fait suivant une loi linéaire dans l'isolant et constante dans le conducteur.

$$\begin{aligned} T &= ux + v && \text{dans l'isolant,} \\ T &= w && \text{dans le conducteur.} \end{aligned}$$

Les équations de continuité et aux limites donnent :

$$\begin{aligned} \text{— pour } x = 0 : & \quad v = w; \\ \text{— pour } x = l : & \quad T = ul + v = T_0; \\ \text{— pour } x = l' : & \quad \text{— } \lambda u = hw, \end{aligned}$$

on en déduit :

$$u = \frac{T_0}{l - \frac{\lambda}{h}}, \quad v = T_0 \left(1 - \frac{l}{l - \frac{\lambda}{h}} \right).$$

La température stationnaire $\bar{T}$ sur la face externe du conducteur est donc donnée par :

$$\bar{T} = v = w = T_0 \left(1 - \frac{l}{l - \frac{\lambda}{h}} \right), \quad (7)$$

d'où l'équation générale du phénomène en se bornant aux temps longs :

$$T = T_0 \left(1 - \frac{l}{l - \frac{\lambda}{h}} \right) \left[1 - \Phi(l') e^{-\frac{\lambda u'^2}{c \rho l^2}} \right].$$

Dans le cas actuel, la température stationnaire est telle que :

$$\frac{\bar{T}}{\bar{T}_0} = 0,524$$

et, en particulier si $T_0 = 320^\circ \text{C}$, $\bar{T} \neq 168^\circ \text{C}$.

2. — **Plaque non protégée.**

On peut se demander quel serait l'ordre de grandeur de la constante de temps en l'absence de tout revêtement.

Les calculs précédents restent valables, mais sont fort simplifiés.

La fonction d'espace a alors pour expression :

$$\Phi_c = A' \cos \alpha' x + B' \sin \alpha' x$$

avec :

$$\alpha'^2 = \frac{c' \rho'}{\lambda' \tau}.$$

Les conditions aux limites conduisent aux relations suivantes :

— pour $x = 0$: $\Phi_c = 0$ d'où $A' = 0$;

— pour $x = l'$: $-\lambda' \alpha' \cos \alpha' l' = h \sin \alpha' l'$,

c'est-à-dire :

$$\text{tg } \alpha' l' = \text{tg } u' = -\frac{\lambda' u'}{l' h}.$$

Dans le cas actuel, on aurait :

$$u' = \frac{\pi}{2},$$

d'où la constante de temps :

$$\tau = 0,017 \text{ s.}$$

3. — **Revêtement mince.**

Supposons que la couche protectrice ait une épaisseur très faible : 0,2 mm par exemple au lieu de 5 mm, on aurait alors :

$$\frac{l^2 c \rho}{\lambda} = 0,264, \quad N = 0,399.$$

Un calcul analogue au précédent, effectué à partir de l'équation (5) donnerait :

$$u = 0,246 \quad \text{d'où} \quad \tau = 4,4 \text{ s.}$$

La protection serait alors de faible durée encore que la qualité de l'isolant soit excellente. Mais avec une couche de résine polyester de caractéristiques $l = 0,2$ mm, $c = 0,3$, $\rho = 1,0$, $\lambda = 4 \cdot 10^{-4}$, la constante de temps serait telle que la protection serait alors inefficace.

III. — REVÊTEMENTS MULTIPLES

Dans le cas où l'isolant n'est pas unique, mais un empilement d'éléments de caractéristiques $\lambda_0 c_0 \rho_0 l_0$, $\lambda_1 c_1 \rho_1 l_1$, etc., la constante de temps étant la même pour tous, nous aurons :

$$\alpha_0^2 = \frac{c_0 \rho_0}{\lambda_0 \tau}, \quad \alpha_1^2 = \frac{c_1 \rho_1}{\lambda_1 \tau} \dots, \quad \alpha_n^2 = \frac{c_n \rho_n}{\lambda_n \tau}, \quad \alpha'^2 = \frac{c' \rho'}{\lambda' \tau}. \quad (a)$$

Les équations aux limites et de continuité donnent :

— pour $x = l_n$:

$$A_n \cos \alpha_n l_n + B_n \sin \alpha_n l_n = 0; \quad (b)$$

— pour $x = l_i$:

$$0 < i < n$$

$$\Phi_i(l_i) = \Phi_{i+1}(l_i);$$

$$-\lambda_i \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \right)_{li} = -\lambda_{i+1} \left(\frac{\partial \Phi_{i+1}}{\partial x} \right)_{li},$$

d'où les relations :

$$A_i \cos \alpha_i l_i + B_i \sin \alpha_i l_i = A_{i+1} \cos \alpha_{i+1} l_i + B_{i+1} \sin \alpha_{i+1} l_i \quad (c)$$

$$-\lambda_i \alpha_i (-A_i \sin \alpha_i l_i + B_i \cos \alpha_i l_i) = -\lambda_{i+1} \alpha_{i+1} (-A_{i+1} \sin \alpha_{i+1} l_i + B_{i+1} \cos \alpha_{i+1} l_i) \quad (d)$$

— pour $x = 0$:

$$A_0 = A' \quad B_0 \alpha_0 \lambda_0 = B' \alpha' \lambda', \quad (c_0)$$

— pour $x = l'$:

$$-\lambda' \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{l'} = h T_c(l') \quad (d_0)$$

$$\text{ou :} \quad -\lambda' \alpha' (-A' \sin \alpha' l' + B' \cos \alpha' l') = h (A' \cos \alpha' l' + B' \sin \alpha' l'). \quad (e)$$

De la relation (b), on tire A_n en fonction de B_n . Les relations (c) et (d) donnent A_i et B_i et, en particulier, A_0 et B_0 en fonction de A_{i+1} et B_{i+1} , donc en fonction de A_n et B_n , donc en fonction de B_n .

Les relations (c₀) et (d₀) donnent A' en fonction de A_0 , donc de B_n , puis B' en fonction de B_0 , donc de B_n et de α_0 , donc d'après les relations (a) de α' . Toutes ces relations sont linéaires, de sorte qu'en portant les valeurs de A' et B' ainsi trouvées en fonction de B_n dans (e), on obtient une relation transcendante analogue à l'équation (5) que l'on peut résoudre en α' , d'où la constante de temps τ .

La résolution, quoique pénible, est possible même dans ce cas complexe.

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

I. — DISPOSITIFS EXPÉRIMENTAUX

1. — La source de chaleur.

Elle est constituée par un bloc cylindrique chauffant en Arcap (alliage inoxydable non ferreux à base de Ni-Cu) de 128 mm de diamètre et dont la partie inférieure est surfacée; dans ce bloc est disposé à la partie supérieure un ensemble de trous verticaux



Fig. 45. — Bloc chauffant

dans lesquels sont placées des résistances constituées par un fil RNC 3 chauffant, bobiné sur un support isolant. Les résistances sont groupées en deux circuits indépendants : l'un central, l'autre périphérique, ce dernier ayant pour but de compenser une déperdition latérale éventuelle de chaleur. Trois trous plus petits, disposés suivant un rayon, permettent la pose de cannes pyrométriques; on peut ainsi déterminer les températures à des distances différentes du centre.

Le bloc est calorifugé à la laine de roche et à la partie inférieure par une couronne d'amiantine (*fig. 45*). L'écart de température entre le centre et la périphérie ne dépasse pas 3° à 300° C.

A la partie supérieure de l'ensemble, un dispositif à rotule permet l'obtention de toutes les inclinaisons désirables et en particulier la rotation du système chauffant (*fig. 46*).

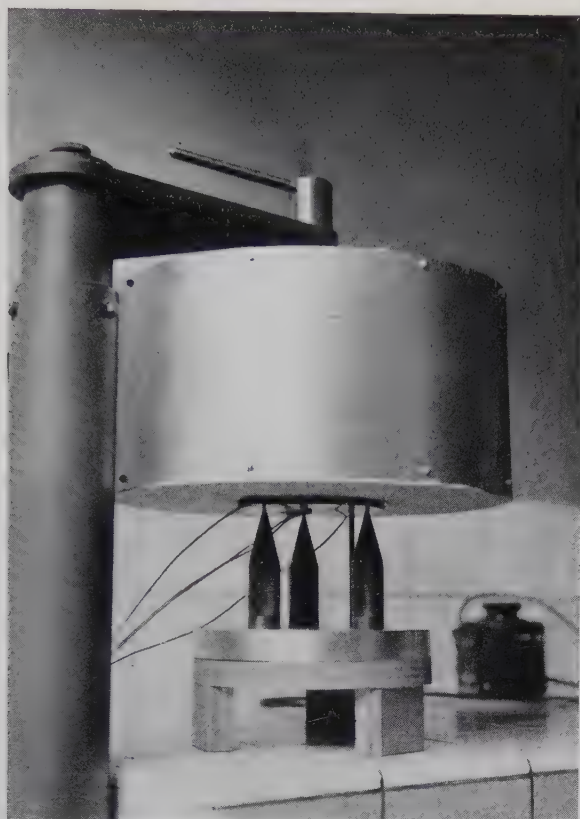


Fig. 46. — Ensemble du dispositif

2. — Les éprouvettes.

Elles se présentent sous la forme d'un disque plat (*fig. 47*) dont l'axe vertical est confondu au moment de l'expérience avec celui du bloc chauffant. Leurs diamètres sont légèrement inférieurs à celui du bloc (125 mm au lieu de 128). Elles sont toujours constituées à leur partie inférieure par une plaque de duralumin d'épaisseur 1,5 mm. Sur cette plaque adhère l'isolant à étudier; la composition de ce dernier est variable; il peut être simple ou complexe, mais son épaisseur est toujours voisine de 5 mm.

Suivant les expériences, il était constitué par :

- une plaque de liège aggloméré;
- une plaque de balsa sec;
- une plaque de caoutchouc mousse à base de silicone;
- une plaque de stratifié tissu de verre-résine phénolique.

Dans cette dernière catégorie, la résine synthétique était toujours la même (résine phénolique ONERA).

Par contre, la composition des tissus de verre a varié. On a utilisé :

- ... soit le tissu « 306 Genin » bidirectionnel et assez fin (0,4 mm d'épaisseur);
- ... soit le tissu 7095 également bidirectionnel mais plus épais (2 mm d'épaisseur) et plus lâche;
- ... soit un tissu unidirectionnel mince (0,3 mm d'épaisseur).



Fig. 47. — Éprouvette

Ces tissus ont tous été imprégnés de résine phénolique; la polymérisation assurant l'assemblage a toujours eu lieu à 120° et ce, pendant 5 heures ¹.

Dans un but de simplification, nous avons désormais désigné par pli phénolique l'ensemble tissu de verre-résine après polymérisation.

L'éprouvette en expérience repose sur trois pieds isolants coniques verticaux en mélamine et de longueur 10 cm (*fig. 46*), disposés sur un cercle de 100 mm de diamètre, à 120° l'un de l'autre. L'air peut ainsi circuler sous l'éprouvette.

3. — Les mesures de température.

Là encore, le problème était considérablement simplifié du fait de la quasi-perfection des techniques actuelles. Nous avons de nouveau utilisé des couples thermo-électriques, en chromel-alumel toutefois, de 0,2 mm de diamètre et placés :

(1) Nous tenons à remercier ici M. HEDIARD qui a bien voulu se charger de la préparation de ces revêtements protecteurs.

— le premier sur la face métallique, la soudure étant au centre du disque. Vu la grande conductivité thermique du duralumin, la température ainsi mesurée est la même sur la face ou dans l'épaisseur du conducteur;

— le second sur la face supérieure de l'isolant;

— le troisième entre les deux constituants de l'isolant, si ce dernier est complexe.

Nous avons en outre admis que, dans l'intervalle 0-300°, la courbe de réponse des couples était linéaire.

L'appareil enregistreur, le même que celui utilisé dans la première partie, permet ici l'enregistrement simultané de trois ou quatre températures toutes les 6 ou 8 s. Cet appareil qui s'impose dans l'expérience actuelle, ne peut toutefois donner, du fait de son inertie, aucune indication précise lors des premiers instants qui suivent le contact.

II. — EXPÉRIENCES ET RÉSULTATS

1. — Conduite de l'expérience.

Le bloc métallique est préalablement porté à la température de 300 ou 350° suivant les cas. L'éprouvette est ensuite placée sur son trépied, la face métallique étant dirigée vers le bas. Elle se trouve alors à la température ambiante de la pièce (20° environ).

Le bloc est alors amené par le système rotatif au-dessus de la face isolante, puis il est rapidement déposé sur cette face, le contact étant assuré par le poids (15 kg environ). Les températures sont ensuite enregistrées au potentiomètre électronique. Les pointés ont lieu pour chacune des courbes toutes les 6 ou 8 s suivant les cas.

L'enregistrement rapide permet de mettre en évidence des anomalies dues probablement à des transformations du matériau et qui se traduisent parfois par des points d'inflexion (*fig. 48*, courbes XXII) ou même par des extremums. Il peut d'ailleurs arriver que ces anomalies disparaissent lors d'une seconde expérience effectuée sur la même éprouvette (*fig. 49*, courbes XXIII).

Il importe de remarquer que la température du bloc chauffant étant fixée, la température de la face supérieure de l'isolant est souvent moindre; cette différence est due au mauvais contact thermique; ce mauvais contact est d'ailleurs accentué du fait de la grande capacité calorifique du bloc chauffant [84].

Il arrive malheureusement assez souvent que ce mauvais contact, dû aux déformations variables de l'isolant, soit la source d'irrégularités dans les courbes de températures de surface de celui-ci (*fig. 51*, courbes XXV). Toutefois la courbe de température du duralumin est toujours régulière du fait de l'intégration des mauvais contacts partiels. Il n'en est pas moins vrai que, du point de vue technologique, le comportement de l'isolant a une grande importance, car il résume en quelque sorte les caractéristiques mécaniques lorsqu'on passe à une réalisation tangible.

2. — La détermination de la constante de temps.

Nous avons choisi, parmi les enregistrements, ceux pour lesquels la température de la face supérieure restait sensiblement constante, c'est-à-dire ceux relatifs aux matériaux cités ci-après :

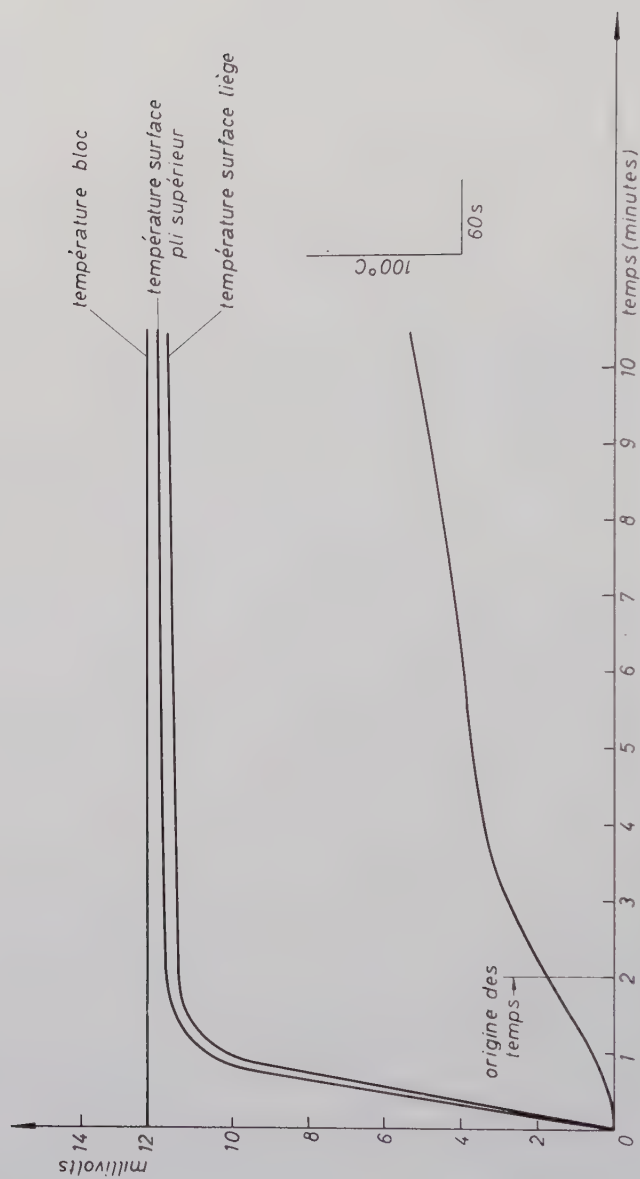


Fig. 48. — Courbes XXII. — Échauffement d'une plaque de duralumin d'épaisseur 1,5 mm, protégée par un revêtement composite (liège aggloméré de 5 mm + 3 plis phénoliques de 1,2 mm)
Première expérience. Température ambiante 24°C. Couples ATC-BTE.

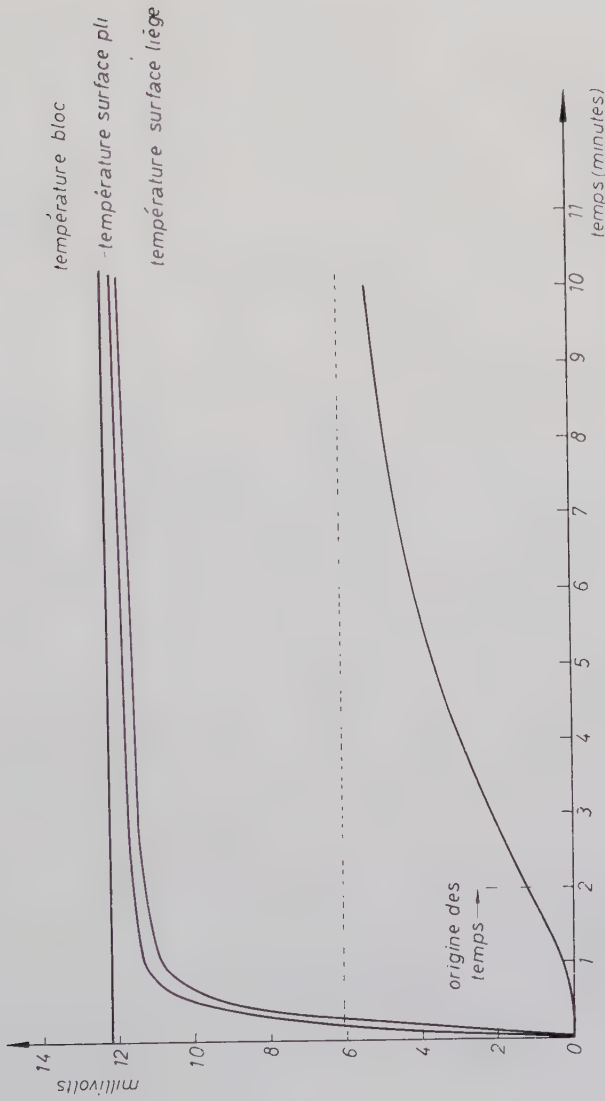


Fig. 49. — Courbes XXIII. — Échauffement d'une plaque de duralumin d'épaisseur 1,5 mm, protégée par un revêtement composite (liège aggloméré de 5 mm + 3 plis phénoliques de 1,2 mm)
Deuxième expérience. — Température ambiante 20°C. — Couples ATE-BTE

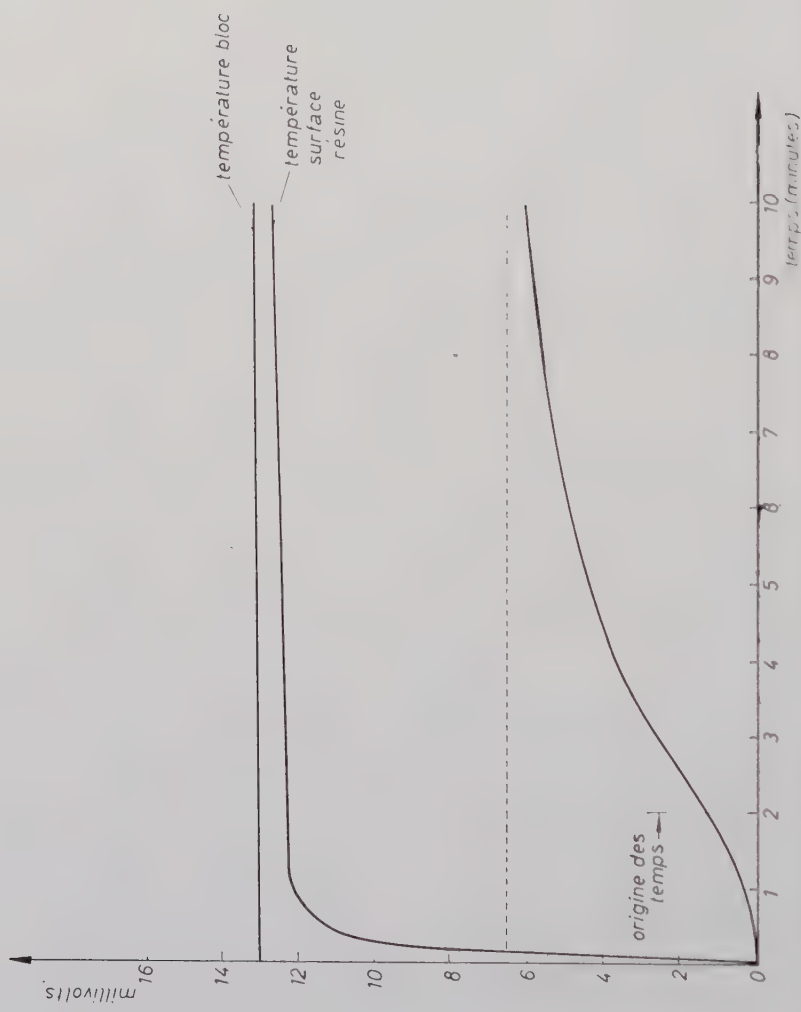


Fig. 50. — Courbes XXIV. — Échauffement d'une plaque de duralumin d'épaisseur 1,5 mm, protégée par un revêtement composite (liège aggloméré comprimé de 4,6 mm + couche de résine phénolique de 0,3 mm) Température ambiante 21°. — Couples ATF-BTF.

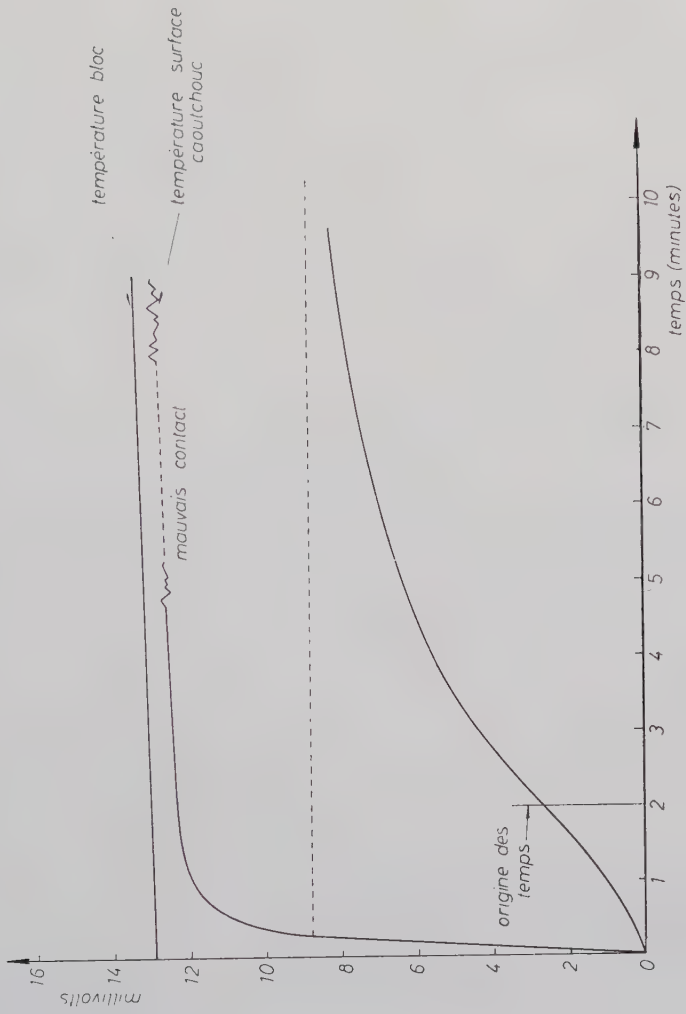


Fig. 51. — Courbes XXV. — Échauffement d'une plaque de duralumin d'épaisseur 1,5 mm, protégée par un revêtement de caoutchouc mousse silicone de 5 mm
Température ambiante 21°. — Couples ATE-BTF.

- liège aggloméré + 3 plis phénoliques (2^e expérience) :
(5 mm) (1,2 mm);
- liège aggloméré comprimé + résine phénolique :
(4,6 mm) (0,3 mm);
- Caoutchouc mousse silicone :
(5 mm).

Ces enregistrements sont reproduits ci-après (*fig.* 49, 50, 51, courbes XXIII, XXIV, XXV). Comme il n'était pas question d'attendre l'établissement du régime stationnaire et que, d'autre part, nous avons démontré que le phénomène d'échauffement pouvait être représenté par une expression du type :

$$T = \bar{T} (1 - Ae^{-\frac{t}{\tau}}) = \bar{T} - T_1 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

nous aurions pu, en prenant trois points de la courbe expérimentale, déterminer $\bar{T}$, T_1 et τ . Mais cette méthode eut été trop imprécise, les points expérimentaux n'étant pas connus avec une précision suffisante.

Aussi, avons-nous procédé de la façon suivante : on se donne *a priori* plusieurs valeurs de $\bar{T}$ et l'on construit les courbes :

$$\text{Log } (\bar{T} - T) = f(t),$$

l'origine des temps était prise 2 mn après l'instant du contact.

La courbe de ce réseau qui se rapproche le plus d'une droite, correspond à la valeur exacte de $\bar{T}$; la pente de cette droite donne précisément la constante de temps. Pratiquement un réseau de cinq ou six courbes suffit pour cette détermination.

Ainsi, la première de ces expériences a conduit au réseau ci-après (*fig.* 52, courbes XXVI).

La pente de la droite correspond à $\bar{T} = 6,1$ est 0,0017, d'où : $\tau \neq 255$ s.

La deuxième expérience a conduit au second réseau (*fig.* 53, courbes XXVII).

La pente de la droite correspondant à $\bar{T} = 6,5$ est 0,00203 d'où : $\tau \neq 214$ s.

La troisième expérience a donné $\bar{T} = 8,8$ et : $\tau \neq 192$ s.

3. — La détermination du coefficient d'échange.

A partir de la relation (7) on peut, en prenant dans le premier cas : $T_0 = 11,6$, $\bar{T} = 6,1$, en déduire h ; on trouve alors :

$$h = 0,00018.$$

Cette valeur est faible si on la compare à celles indiquées dans les tables [85]. Mais il est vrai que l'on n'a pas affaire à un corps noir et que la position de la surface métallique ne favorise pas le refroidissement.

Remarquons également la bonne approximation avec laquelle on recoupe la valeur théorique de 249 s de la constante du temps, là où l'expérience a donné 255 s.

Si l'on connaît les caractéristiques λ , c , ρ de la substance isolante, on peut fort bien, en prenant pour h la valeur 0,00018, prévoir avec une approximation suffisante

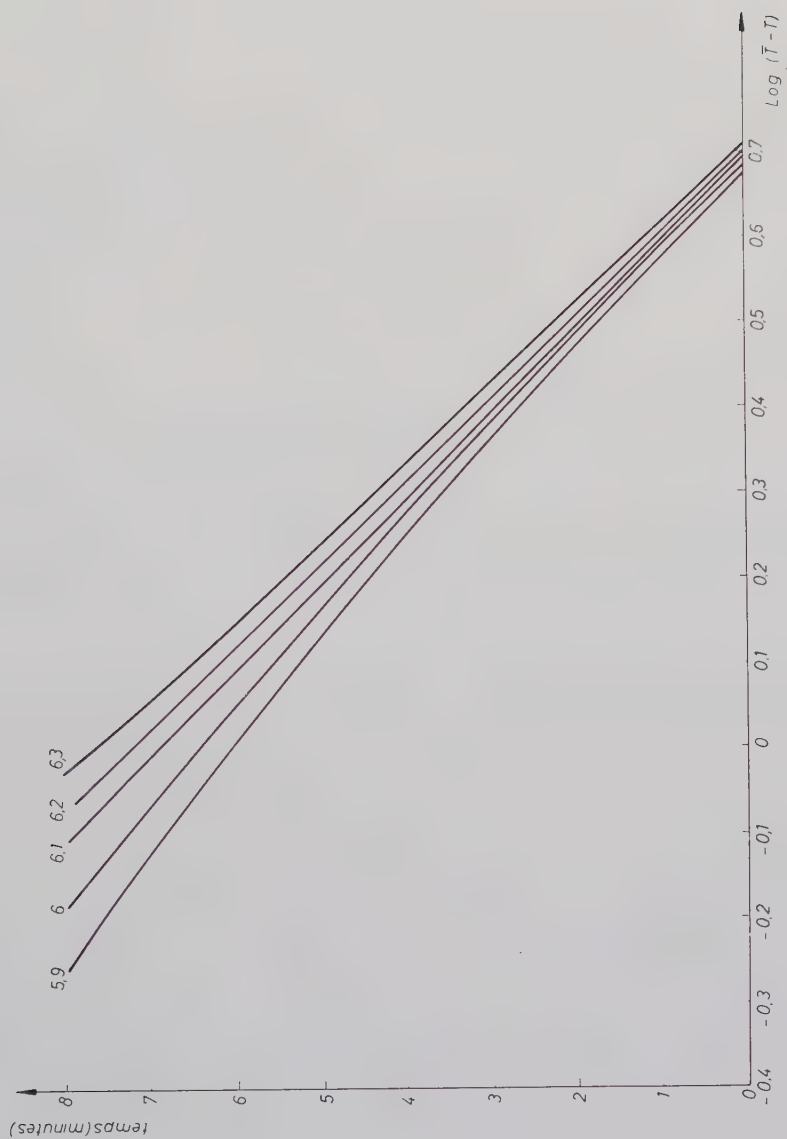


Fig. 52. — Courbes XXVI. — Cas du liège + plis phénoliques

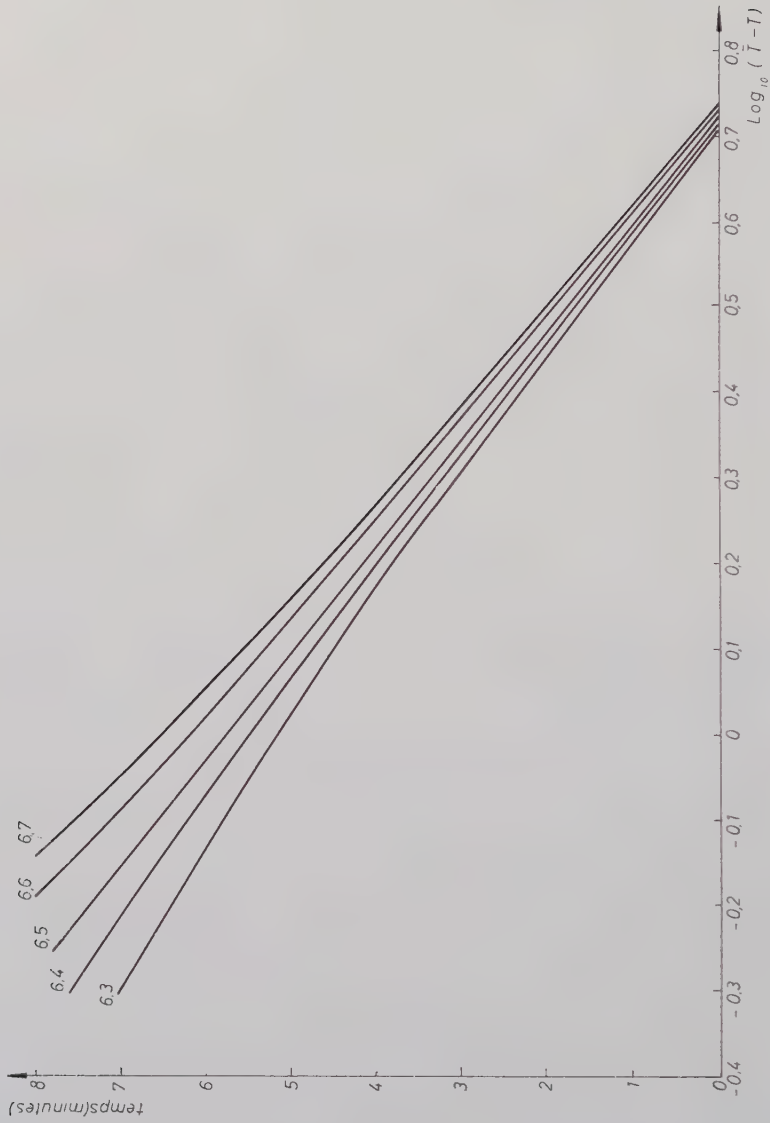


Fig. 53. - Courbes XXVII. - Cas du liège + résine phénolique

l'évolution du phénomène et réciproquement, la connaissance de la constante de temps et de la température stationnaire peut, en admettant la constante de h , fournir un bon ordre de grandeur de λ .

Le tableau XVII ci-après résume les différents essais effectués et les constantes de temps trouvées expérimentalement.

TABLEAU XVII

Diamètre des éprouvettes 125 mm — Épaisseur du duralumin 1,5 mm

Premier isolant (épaisseur mm)	Second isolant (épaisseur mm)	Température moyenne d'essai (degrés C)	Constante de temps (secondes)	Observations
Liège aggloméré (5)	3 plis stratifiés phénoliques 306 (1,2)	320	255	Point d'inflexion à la première expérience
Liège aggloméré (3)	8 plis stratifiés phénoliques 306 (3,1)	320	220	
Liège aggloméré comprimé (4,6)	Couche de résine phénolique (0,3)	345	214	
Liège aggloméré comprimé (4,6)	1 pli tissu unidirectionnel + couche de résine phénolique (0,3)	350	205	
Balsa (5)	Formica (1,5)	350	220	Dégagement de gaz; clivage dans le balsa
Balsa (5)	3 plis stratifiés phénoliques 306 (1,5)	350	200	Déformation variable
Caoutchouc mousse silicone (5)		350	192	»
Stratifié phénolique 1 pli 306 1 pli 7095 1 pli 306 (3,4)		350	122	»
Stratifié phénolique 1 pli 306 1 pli 7095 1 pli 306 (3,7)	3 plis stratifiés phénoliques 306 (1,3)	350	120	»
Stratifié phénolique id (3,6)	Couche réfractaire	350	120	»

4. — Le refroidissement de la plaque non protégée.

Afin de préciser encore l'ordre de grandeur de h , nous avons effectué l'expérience suivante :

La plaque métallique seule et non protégée ayant été chauffée par contact prolongé avec le bloc chauffant, est ensuite laissée se refroidir naturellement dans la même position horizontale.

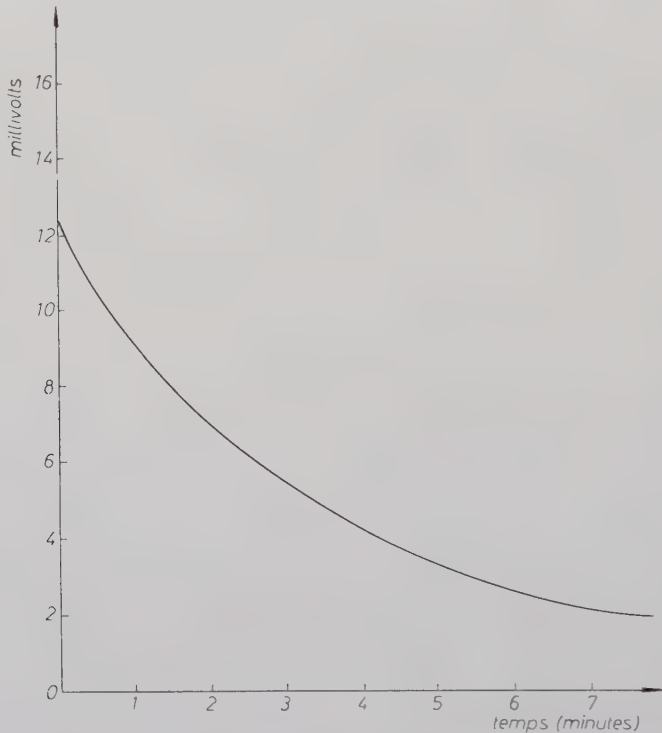


Fig. 54. — Courbe XXVIII. — Refroidissement d'une plaque horizontale de duralumin
Origine des températures 21°C — Couples ATE-BTE

Nous styliserons le problème en supposant les températures symétriques par rapport au plan médian et c'est dans ce plan que nous placerons l'origine des coordonnées. Nous désignerons cette fois par $2l$ l'épaisseur de la plaque.

La fonction d'espace de la solution simple sera $A \cos x$. Les conditions aux limites donnent :

$$\lambda \alpha \sin \alpha l = h \cos \alpha l$$

et en posant $\alpha l = u$, on en déduit $u \operatorname{tg} u = \frac{hl}{\lambda}$.

Si l'on prend $h = 1,8 \cdot 10^{-4}$, $\lambda = 0,3$, $2l = 0,15$, il vient :

$$u \operatorname{tg} u = 0,0000450.$$

La première solution est donnée par :

$$u_1^2 \neq 0,0000450;$$

Il lui correspond la constante de temps fondamentale :

$$\tau_1 = 234 \text{ s.}$$

La seconde solution est donnée par :

$$u_2 \neq \pi,$$

d'où la seconde constante de temps :

$$\tau_2 = 0,001 \text{ s.}$$

Pratiquement, la solution fondamentale représentera donc tout le phénomène de refroidissement.

Ceci étant, si, à partir de la courbe de refroidissement (*fig. 54*, courbes XXVIII) l'on porte en ordonnées le logarithme de la température et en abscisses le temps, on obtient une droite de pente 0,00177 d'où l'on déduit :

$$\tau = 245 \text{ s.}$$

Ce résultat est à rapprocher de la valeur de 234 s obtenue en faisant l'hypothèse $h = 0,00018$, hypothèse qui était donc légitime.

Il semble donc que les lois de la Thermocinétique, lois qui ont été établies pour de faibles écarts de température soient, au moins dans le cas actuel, applicables pour des écarts beaucoup plus grands. Cela est probablement dû aux faits que, d'une part, la surface convectante n'est pas un corps noir (ce qui diminue le coefficient d'échange par rayonnement) et que, d'autre part, le positionnement de cette surface contrarie le refroidissement (ce qui diminue également le coefficient d'échange par convection).

CONCLUSION

Dans l'état actuel des choses il ne semble pas qu'on puisse dépasser la température de 400° C.

La principale amélioration que l'on puisse apporter réside dans la préparation des éprouvettes dont les écarts de planéité sont trop souvent la cause d'un contact thermique défectueux. Il est vrai que cela n'est pas toujours possible. On peut alors songer :

— soit à modifier la méthode en utilisant comme source de chaleur un bain métallique fondu sur la surface duquel on déposerait l'éprouvette, la face convectante étant cette fois dirigée vers le haut;

— soit à utiliser la méthode de chauffage par rayonnement : l'éprouvette superficiellement noircie serait placée à une distance fixe de la source rayonnante. Le problème serait alors celui du mur soumis à un flux thermique constant. Ce problème a été traité par M. RIBAUD [86]. Les défauts de planéité n'intervenant plus, ce serait là le principal avantage de cette nouvelle méthode.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Pour mesurer une conductivité thermique, il faut nécessairement repérer dans le milieu intéressé un gradient de température lié au passage d'un flux de chaleur.

En régime stationnaire, c'est-à-dire lorsque la distribution de température reste invariable dans le temps, il faut provoquer un flux de chaleur constant et surtout, ce qui est beaucoup moins facile, canaliser ce flux. De ce fait, les difficultés expérimentales ne correspondent nullement avec la simplicité de l'équation de distribution des températures.

Par contre, en régime variable, le flux de chaleur peut être simplement engendré par les inégalités de température existant dans le milieu, soit que la chaleur y soit déjà introduite, soit qu'on l'y introduise. Connaissant la chaleur spécifique et la densité, le problème se ramène alors uniquement à celui de la mesure de températures. Le problème de la canalisation du flux ne se pose plus, ce qui simplifie considérablement la partie expérimentale.

La méthode du signal périodique entretenu est, à ce point de vue, une méthode de choix; mais il était nécessaire, d'une part, de normaliser le processus de dépouillement et, d'autre part, d'étudier l'évolution des phénomènes de transfert et de dissipation latérale à haute température pour qu'elle puisse désormais s'imposer dans le domaine de la recherche métallurgique au même titre que les anciennes méthodes.

Plus délicate, certes, est la méthode du touchau car la théorie suppose ici une température imposée sur la face d'un mur froid semi-infini et l'on sait qu'en général il est fort difficile d'imposer une température, à plus forte raison lorsqu'il y a mauvais contact. Cette méthode reste néanmoins fort attrayante par sa simplicité et elle peut aisément, moyennant certaines précautions relatives précisément au mauvais contact ainsi d'ailleurs qu'aux déperditions parasites, être amenée à rendre de grands services dans les essais effectués sur les matériaux isolants.

Si la dernière partie de ce travail semble être davantage du domaine de la technologie, il n'en est pas moins vrai que, là aussi, on se trouve en présence du cheminement d'un signal thermique et que, si le problème du contact reste encore fort important, nous avons à notre disposition un procédé rapide pour l'étude des revêtements isolants, lequel procédé peut d'ailleurs être employé parallèlement aux méthodes de chauffage par rayonnement, communément appelées chauffage par infrarouge.

Dans tous les cas, la Thermocinétique est d'un grand secours car elle permet de prévoir ou inversement de conclure à partir de l'expérience. Il est hors de doute que les problèmes, si nombreux maintenant, d'échauffements cinétiques ne contribuent fortement au développement de cette science qui a cependant déjà à son actif tant de beaux états de service.

BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE

- [A] H. S. CARLSLAW and J. C. JAEGER. — *Conduction of heat in Solids*, 2^e édit., Oxford at the Clarenton Press, 1959.
- [B] E. R. G. ECKERT and R. M. DRAKE Jr. — *Heat and Mass transfer*, McGraw Hill, New York, 1959.
- [C] J. M. KAY. — *An Introduction to Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Cambridge U. Press, 1957.
- [D] M. JACOB. — *Heat Transfer*, New York, J. Wiley and Sons; London, Chapman and Hall, 1949.
- [E] McADAMS. — *Heat Transmission*, McGraw Hill, New York. Traduction française de J. BOUDROT, Paris, Dunod, 1950.
- [F] P. VERNOTTE. — *Thermocinétique*, Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, n° 224, 1949.
- [G] P. VERNOTTE. — *Calcul numérique. Calcul physique. Application à la Thermocinétique*, Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, n° 319, 1956.
- [H] R. C. L. BOSWORTH. — *Heat Transfer Phenomena*, New York, J. Wiley and Sons, 1952.
- [I] Ch. FABRY. — *Propagation de la chaleur*, A. Colin, Paris, 1942.
- [J] M. TEN BOSCH. — *Transmission de la chaleur*, traduction française P. L., Paris, Dunod, 1950.
- [K] M. FISHENDEN and O. A. SAUENDERS. — *The Calculation of Heat Transmission*, H. M. Stationery Office, London, 1932; *Introduction to heat Transfer*, London, Oxford U. Press, 1950.
- [L] L. R. INGERSOLL, O. J. ZOBLL, A. C. INGERSOLL. — *Heat conduction*, New York, McGraw Hill Book Co., Inc., 1948.
- [M] H. GRÖBER. — *Wärmeübertragung*, Springer, Berlin, 1925; *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung*, Springer, Berlin, 1933.
- [N] M. VERON. — *Champs thermiques et flux calorifiques*, Bulletin de la Société française Babcock Wilcox, Nov. 1951, n° 24.
- [O] G. RIBAUD. — *Cours professé à la Sorbonne et Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 12 janvier 1948, 226, 140-2, 19 janvier 1948, 226, 204-6, 9 février 1948, 226, 449-51.
- [P] E. WHITTAKER and G. ROBINSON. — *The calculus of observations*, 5^e édit., Blackie and Son, London, 1946.
- [Q] C. J. SMITHELLS. — *Metals Reference Book*, 2^e édit., vol. II, London, Butterworth Scientific Publications, 1955.
- [R] C. F. LUCKS and H. W. DEEM. — *American Society for testing materials. Special publication*, n° 227, 15.

- [S] R. CADIERGUES et J. GENEVAY. — *Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux publics*, décembre 1953, n° 10, 12-40.
- [T] Ph. GALMICHE et A. HIVERT. — *Revue de la Métallurgie*, T. LV, n° 10, octobre 1958, 907-17.
- [U] H. BIBRING. — *La Recherche aéronautique*, n° 41, sept.-oct. 1954, 49-55.

PREMIÈRE PARTIE

Sur la méthode du signal périodique entretenu (conducteurs)

- [1] P. VERNOTTE. — Réf. F, § 1,112, 6.
- [2] Ch. FABRY. — Réf. I, 161.
- [3] H. S. CARLSLAW and J. C. JAEGER. — Réf. A, IV, 133-48.
- [4] P. VERNOTTE. — Réf. F, § 2,7123, 205-7.
- [5] J. D. FORBES. — *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 1864, Part I, Vol. 23, 133-46 et 1867, Part III, Vol. 24, 73-110.
- [6] E. GRIFFITHS. — *Proceedings of the Royal Society*, 1928, 41, 151.
- [7] I. INGENHAUSEN. — *Journal de Physique*, 1789, 34, 68 et 380.
- [8] P. VERNOTTE. — Réf. F, § 3,611, 338-340.
- [9] A. J. ANGSTRÖM. — *Annalen der Physik*, Leipzig, 1861, 114, 513; 1864, 123, 628; *The Philosophical Magazine*, Leipzig, 1863, 25, 130; 1863, 26, 161.
- [10] HAGSTRÖM. — *Öfvers Vertensk Akad. Förh Stockholm*, 1891, 48, 45, 289, 381.
- [11] L. C. HOGAN and R. B. SAWYER. — *Journal of applied Physics*, 1952, 23, n° 2, 177-80.
- [12] R. W. KING. — *The Physical Review*, 1915, sér. 2, Vol. 26, 437-45.
- [13] C. STARR. — *The Review of Scientific Instruments*, 1937, Vol. 8, 61-64.
- [14] P. H. SIDLES and Gc DANIELSON. — *Journal of applied Physics*, 1954, Vol. 25, 58-66.
- [15] G. E. MCINTOCH, Dc HAMILTON and W. L. SIBBITT. — *Transactions of the American Society of mechanical engineers*, 1954, Vol. 76, 407-10.
- [16] M. A. EL HIFNI and B. T. CHAO. — *Transactions of the American Society of mechanical engineers*, mai 1956, Vol. 78, n° 1, 813-21.
- [17] J. BILLINGTON. — *Journal of Scientific Instruments*, 1949, 26, 20.
- [18] J. PROCOPIU, S. BURSUC. — *Buletin Stiintific Academia republicii populare romîne*, avril-juin, 1955, 2, T. VII, 413-25.
- [19] D. ROSENTHAL. — *Transactions of the American Society of mechanical engineers*, 68, 849-66.
- [20] D. ROSENTHAL and A. AMBROSIO. — *Transactions of the American Society of mechanical engineers*, 1951, 73, n° 7, 971-74.
- [21] D. ROSENTHAL and N. E. FRIEDMANN. — *Transactions of the American Society of mechanical engineers*, 1956, 78, n° 6, 1175-80.
- [22] P. VERNOTTE. — Réf. G, A.E. 4, II, 327-328.

- [23] P. VERNOTTE. — *Essai sur la convection naturelle*. Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air n° 288, 1953, 42-45.
- [24] P. VERNOTTE. — Réf. G, A.E. 3, 323-324.
- [25] P. VERNOTTE. — Réf. G, A.E. 4, II, 329-330.
- [26] P. VERNOTTE. — Réf. F, A.E. 27, 457-8.
- [27] P. VERNOTTE. — *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, n° 24, T. 242, juin 1956, 2808-10.
- [28] P. VERNOTTE. — Réf. F, § 3,711, 361-71.
- [29] F. NEUMANN. — *Annalen der Physik*, 1872, 146, 257.
- [30] P. VERNOTTE. — Réf. G, A.E. 4, IV, 332-337.
- [31] P. VERNOTTE. — Réf. G, A.E. 4, V, 337-339.
- [32] P. VERNOTTE. — *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, n° 25, T. 242, juin 1956, 2913-14.
- [33] P. VERNOTTE. — Réf. F, § 2,72, 23, 216-220.

DEUXIÈME PARTIE

I. — Sur les méthodes de refroidissement (isolants)

a) Refroidissement de la plaque

- [34] E. D. WILLIAMSON and L. H. ADAMS. — *The Physical Review*, 1919, 14, 99-114.
- [35] H. P. GURNEY and J. LURIE. — *Industrial and engineering Chemistry*, 1923, 15, 1170-72.
- [36] E. SCHMIDT. — *Gesundheits-Ingenieur*, 1927, Beiheft 20, Reihe I, 1-23.
- [37] A. SCHACK. — *Der Industrielle Wärmeübergang Verlagstahleisen*, Düsseldorf, 1929.
- [38] F. C. N. and O. T. SCHULTZ. — *Industrial and engineering Chemistry*, juillet 1942, 34.
- [39] P. ACLOQUE. — *Thèse*, Paris, 1950.

b) Refroidissement du parallélépipède

- [40] P. BERGER. — *Zeitschrift für angewandte Mathematik and Mechanik*, 1928, 8, 479.
- [41] A. B. NEWMANN. — *Transactions of the American Institute of Chemical engineers*, 1930, 24, 44-47 et 1933, 27, 310-333.
- [42] A. B. NEWMANN. — *Industrial and engineering Chemistry*, 1936, 28, 545-48.
- [43] F. GOTTWALD. — *Kunststoffe*, 1939, 46, 248.
- [44] J. FREILING, R. E. ECKERT and J. W. WESTWATER. — *Industrial and engineering Chemistry*, 1952, 1, 906-909.

c) Refroidissement de la sphère

- [45] R. WEBER. — *Vyschr. Natur. ges.*, Zurich, 1878, 23, 209.
- [46] A. AYRTON and C. PERRY. — *The Philosophical Magazine*, 1878, 5, 5, 241.
- [47] E. PEDDIE. — *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 1901, 19, 34.

- [48] S. HOARE. — *The Philosophical Magazine*, 1940, 7, 29, 52.
- [49] S. PATERSON. — *Proceedings of the Physical Society*, 1947, 59, 50-58.
- [50] L. MATTAROLO. — *Nuovo Cimento*, octobre 1950, VII, 5 bis, 809-15.
- [51] C. CODEGONE. — *Atti della Accademia delle Scienze di Torino*, Torino, 1953-54, 88, I, 16-20.

d) *Refroidissement du cylindre*

- [52] L. MATTAROLO. — Déjà cité. Ref [50].
- [53] P. VERNOTTE. — *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1934, 198, 57.
- [54] L. HOCK. — *Chemische Berichte*, 1953, 9, 1166-68.
- [55] E. D. WILLIAMSON and L. H. ADAMS. — *The Physical Review*, 1919, sér. 2, 14, 99.

I bis. — Sur les méthodes d'échauffement (isolants)

- [56] F. C. HOOPER and S. C. CHANG. — *Heating, Piping and Air conditioning*, 1952, 24, n° 10, 125-9.
- [57] P. KUNZE. — *Zeitschrift für angewandte Physik*, 1953, V^e Band, Heft 3, 94.
- [58] T. S. E. THOMAS. — *British Journal of applied Physics*, octobre 1957, Vol. 8, n° 10, 403-5.

I ter. — Divers (isolants)

- [59] L. GALL. — *Journal of the Institution of electrical engineers*, 1942, 89, II, 434.
- [60] J. HOOPER and W. LEPPER. — *Heating Piping and Air conditioning*, 1950, 22, 129.
- [61] J. BLACWELL. — *Journal of applied Physics*, 1954, 25, 157.
- [62] G. F. LANDEGREN. — *American Journal of Physics*, 1957, 25, n° 8, 532-4.

II. — Sur les méthodes du signal (isolants)

- [63] P. VERNOTTE. — Réf. F, § 3,5, 281-300.
- [64] L. N. CLARKE and R. S. T. KINGSTON. — *Australian Journal of Applied Science*, 1950, Vol. 1, n° 2, 172-187 et 1951, Vol. 2, n° 2, 235-242.
- [65] J. R. M. RADOK. — *Australian Journal Scientific Research*, A, 4, 12-5.
- [66] O. KRISCHER. — *Chemie-Ingenieur Technik*, janvier 1954, 1, 42-44.
- [67] O. KRISCHER and H. ESDORN. — *Verein Deutscher Ingenieure Forschungshefte*, 1955, n° 450, 28-39.
- [68] A. C. FITCH. — *The American Teacher*, 1935, 3, 135-6.
- [69] E. D. VAN REST. — *Proceedings of the Physical Society*, 1934, 46, 537.
- [70] A. B. NEWMANN. — *Industrial and engineering chemistry*, 1936, 28, 545.
- [71] Z. V. HARVALIK. — *The Review of Scientific Instruments*, 1947, 18, 11, 815.
- [72] M. MERLIN. — *Nuovo Cimento*, 1949, 6, 283-9.
- [73] K. O. BEATTY and J. R. ARMSTRONG. — *Industrial and engineering Chemistry*, 1950, 42, 8, 1527-32.

- [74] E. M. SCHOENBORN. — *Industrial and engineering Chemistry*, 1950, 42, 4, 1527.
- [75] M. PIZZO. — *Atti della Accademia delle Scienze di Ferrara*, 1952, 53, Vol. 30, 79-88.
- [76] L. N. CLARKE. — *Australian Journal of applied Science*, 1954, Vol. 5, n° 2, 178-92.
- [77] G. GAFNER. — *British Journal of applied Physics*, octobre 1957, Vol. 8, n° 10, 393-97.
- [78] L. S. NICOLAE. — *Buletin Stiintific Academia republicii populare romine*, 1957, T. IX, Vol. 1, 215-225.

III. — Sur la méthode du touchau (isolants)

- [79] P. VERNOTTE. — Réf. F, § 3,52, 300-304.
- [80] P. ACLOQUE. — Réf. 37.
- [81] P. VERNOTTE. — *Chaleur et Industrie*, 1937, IX, 330-338.

TROISIÈME PARTIE

- [82] C. CODEGONE. — Réf. 40.
- [83] P. VERNOTTE. — Réf. F, § 2,3, 73-115.
- [84] P. VERNOTTE. — Réf. F, § 3,26, 232-37.
- [85] Ch. FABRY. — Réf. I, 161.
- [86] G. RIBAUD. — Réf. O.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

ANALOGIES ÉLECTRIQUES ET TRANSFERTS DE CHALEUR EN RÉGIME TRANSITOIRE

Vu et approuvé :

Paris, le 25 avril 1960

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. PÉRÈS

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean SARRAILH



